18/5

آریا توکلی

1) $y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+x+2 \Rightarrow x^2+x(1-y)+2+y$

$\Delta\ge 0 \Rightarrow 1+y^2-2y-8-4y\ge 0 \Rightarrow y^2-6y-7\ge 0 \Rightarrow (y-7)(y+1)$ 2

$y=7$, $y=-1$

-1		7	
+	-		+

$[-\infty,-1]\cup[7,\infty)$

1/75

3) الف) $y=2x^2-5x+10$ $\quad \frac{-b}{2a}=\frac{5}{4} \Rightarrow 2(\frac{5}{4})^2-5(\frac{5}{4})+1=\frac{-34}{16}=\frac{-17}{8}$

$[-\frac{17}{8},\infty)$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ $\quad \frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3 \Rightarrow -3^2+18-5=4 \Rightarrow \sqrt{(-\infty,4]}=[0,4]$

-0/25

$[0,2]$

ج) $\sqrt{x^7-3x^2+4x+1}$

$R_f=[0,\infty)$

اگر توان بزرگتر فرد باشد برد ما R میشود و چون زیر رادیکال رفته از ۰ تا بینهایت میشود

د) $\log(\underbrace{x^3-6x^2+7x+4}_{R_f=R}) \Rightarrow (-\infty,\infty)$

1/75

4) الف) $y=\frac{3x+1}{2x-6} \Rightarrow x=\frac{3y+1}{2y-6} \Rightarrow x=\frac{6y+1}{2y-3}$ $\quad R_f=R-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{4y+1}{y-2}} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2y+1}{y-4}}$ $\quad R_f=[0,\infty)-\{\sqrt{4}\}$

-0/25

$R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \sqrt{x^2+3}=\sqrt{3}\min$

$\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ $\quad R_f=[\frac{4}{\sqrt{3}},\infty)$

د) $x^2+\frac{1}{x^2+4} \Rightarrow x^2+4+\frac{1}{x^2+4}-4 \Rightarrow [+\frac{1}{4},\infty)$

غلط $R_f=[\frac{+1}{4},+\infty)$

(۴) ۲

$y = \frac{3x^2+4}{x^2-1}$ روش اصلی) $yx^2 - y = 3x^2+4 \Rightarrow yx^2-3x^2 = 4+y$

$x^2(y-3) = 4+y \rightarrow x^2 = \frac{4+y}{y-3}$

-4		3	
+	−		+

$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, \infty)$ ✓

روش تذکر ۲) $y = \frac{3(0)+4}{0-1} = -4$ $\quad y = \frac{3(\infty)^2+4}{(\infty)^2-1} = 3$ $\quad R_f = (-\infty,-4] \cup (3,\infty)$ ✓

مخرج مساوی صفر نشود.

(۵) ۲

$y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3}$ روش اصلی) $y\sin x + 3y = 2\sin x - 1$

$y\sin x - 2\sin x = -1-3y \rightarrow \sin x(y-2) = -1-3y$

$\sin x = \frac{-1-3y}{y-2} \rightarrow -1 \leq \frac{-1-3y}{y-2} \leq 1$

$-1 \leq \frac{-3y-1}{y-2} \rightarrow \frac{-2-1}{-1+3} = \frac{-3}{2}$ ✓

$1 \geq \frac{-3y-2}{y-2} \rightarrow \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$ ✓ $\Rightarrow [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

تذکر ۲) $y = \frac{2\sin - 1}{\sin x + 3} \rightarrow -1$ کمترین $\rightarrow \frac{-2-1}{-1+3} = \frac{-3}{2}$

1 بیشترین $\rightarrow \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$ $\Big\}$ $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$ ✓

(۶) ۱/۵

$y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} \Rightarrow yx^2 - yx + y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$x^2(1-y) + x(y-1) + \frac{1}{4} - y \Rightarrow \Delta \geq 0$ ✓ ، ضریب $x^2 \neq 0$

$1-y \neq 0$

$y \neq 1$

$y^2 + 1 - 2y + (-1+4y)(1-y)$

$y^2 + 1 - 2y - 4y^2 + 5y - 1$

$-3y^2 + 3y \geq 0 \rightarrow 3y(-y+1)$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $- \mid + \mid -$

$R_f = [0,1]$ $\rightarrow R_f = [0,1)$

$D_f = \mathbb{R}$ ✓ عبارت $x^2 - x + 1$ مثبت است.

ب) ۲

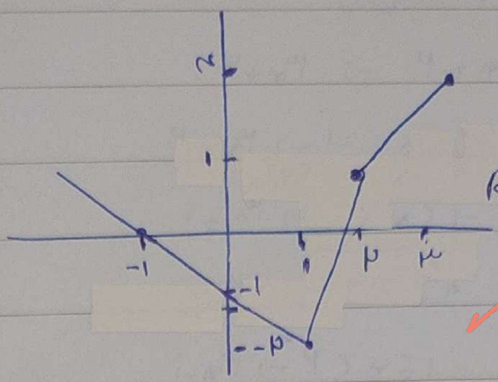
$y = |۲x-۲| - |x-۳|$

$\downarrow$ ۱ $\qquad \downarrow$ ۳

$x < ۱ \qquad ۲-۲x-(۳-x) = -x-۱$

$۱ \leq x \leq ۳ \qquad ۲x-۲-(۳-x) = ۳x-۵$

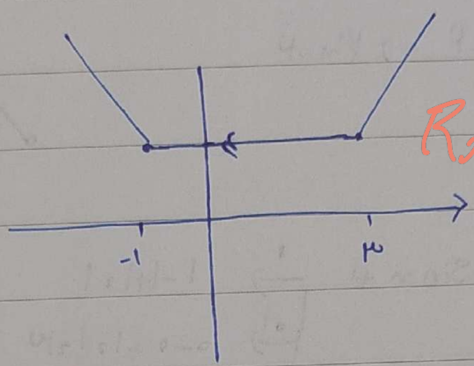
$x > ۳ \qquad ۲x-۲-(x-۳) = x+۱$



$R_f = [-۲, \infty)$

$y = |x-۳| + |x+۱|$

$\downarrow$ ۳ $\qquad \downarrow$ -۱



$R_f = [۴, +\infty)$

[illegible]

ج) ۱.۵

$|x-۲| - |۲x+۲| \leq ۱$

$\downarrow$ ۲ $\qquad \downarrow$ -۱

-۱		۲
$۲-x+۲x+۲ \leq ۱$	$۲-x-۲x-۲ \leq ۱$	$x-۲-۲x-۲$
$x+۴ \leq ۱$	$-۳x \leq ۱$	$-x \leq ۵$
$x \leq -۳$ ✓	$x \geq -\frac{۱}{۳}$ ✓	$x \geq -۵$ ✓

$(-\infty, -۳] \cup [-۱, \frac{۱}{۳}] \cup [۲, \infty)$ $\longrightarrow$ $x \in (-\infty, -۳] \cup [-\frac{۱}{۳}, +\infty)$

۵) ۲

الف) $y = [x] + [-x] + ۳$

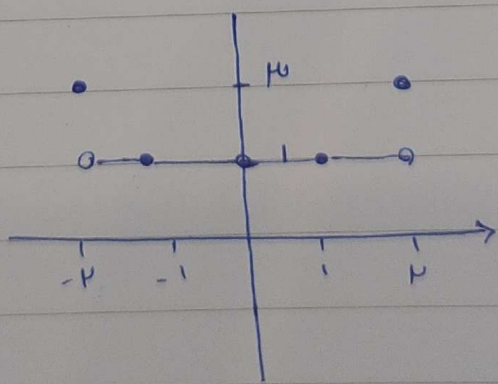
$-۲ < x < -۱ \rightarrow ۲$

$-۱ \leq x < ۰ \rightarrow ۲$

$۰ \leq x < ۱ \rightarrow ۲$

$۱ \leq x < ۲ \rightarrow ۲$

$x = ۲ \rightarrow ۳$



ب) $y = 3x - [x]$

$x = -2 \rightarrow 3x+2$

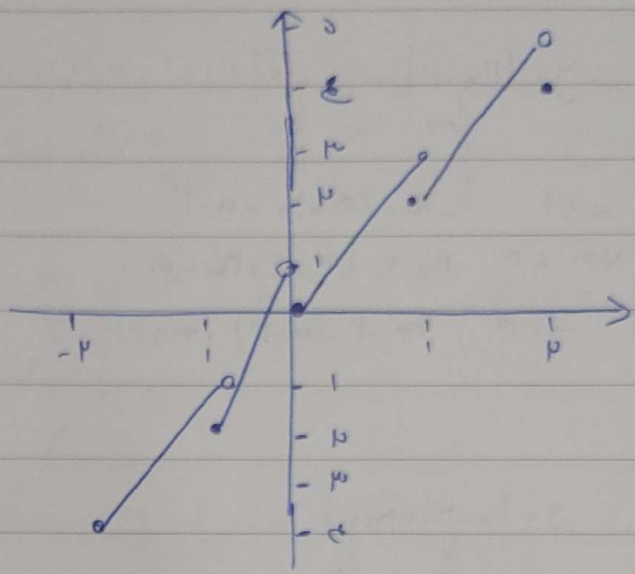
$-2 < x < -1 \rightarrow 3x+2$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow 3x+1$

$0 \leq x < 1 \rightarrow 3x$

$1 \leq x < 2 \rightarrow 3x-1$

$x = 2 \rightarrow 3x-2$



(10

$y = \sin^2 x - \sin x + 1 \xrightarrow{1} 1-1+1=1$

$\xrightarrow{-1} 1+1+1=3$

$\xrightarrow{-\frac{b}{2a}} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

$\left[\frac{3}{4}, 3\right]$ ✓

2

$y = \sin^4 + \sin^2 + 1 \xrightarrow{1} 1+1+1=3$

$\xrightarrow{0} 0+0+1=1$

$-\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2}$ ✗

$\sin^2$ نمی‌تواند منفی باشد

$[1, 3]$ ✓