۱۱

پرنیان شمشیری ـ دوازدهم دفتر A

تکلیف شماره (۲۷)

(۱)

$f(x)=\cos^{۳}(۲x)+ax^{۲}+b \quad \rightarrow \quad a+b=۱+(-۱)=\boxed{۰}$

$\lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲ \rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\frac{-۶\sin(۲x)\cos^{۲}(۲x)+۲ax}{x}=۲ \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x\to ۰^-}\frac{-۶\times ۲x+۲ax}{x}=۲$

$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=۰ \rightarrow f(۰)=۰ \rightarrow \cos^{۳}(۰)+۰+b=۱+b=۰ \rightarrow \boxed{b=-۱}$ ✓

$a+b=۶$

(۱)

$\rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\frac{(۲a-۱۲)x}{x}=۲ \rightarrow ۲a-۱۲=۲ \rightarrow \boxed{a=۷}$

$\lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲ \rightarrow f'(x)=-۲\times ۳\times \sin(۲x)\cos^{۲}(۲x)+۲ax \rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\frac{-۶\overset{۰}{\sin(۲x)}\overset{۱}{\cos^{۲}(۲x)}+۲ax}{x}=\frac{۲ax}{x}=۲a=۲ \rightarrow \boxed{a=۱}$

(۲)

$f(x)=x^{۲}-۱ \rightarrow f'(x_1)=۲x_1=m$

$f'(x_2)=۲x_2=m'$

$\xrightarrow[\text{چون متقارن است}]{x_1=-x_2} m=۲x_1 ,\ m'=-۲x_1 \rightarrow mm'=-۱ \rightarrow -۴x_1^{۲}=-۱$

$\rightarrow x_1^{۲}=\frac{۱}{۴} \rightarrow x_1=\frac{۱}{۲}$ یا $x_2=\frac{-۱}{۲}$

$\rightarrow y=x^{۲}-۱=\frac{۱}{۴}-۱=\boxed{\frac{-۳}{۴}} \rightarrow y_1=y_2=\frac{-۳}{۴} \rightarrow \frac{-۳}{۴}+\frac{-۳}{۴}=\boxed{\frac{-۶}{۴}}$ ✓

(۲)

(۳)

$f(x)=\frac{a}{۲x-۱} \rightarrow f'(x)=\frac{(۰)(۲x-۱)-(a)(۲)}{(۲x-۱)^{۲}}=\frac{-۲a}{(۲x-۱)^{۲}}$

$\begin{array}{|c}۲٫۵\\ ۶\end{array} \quad \begin{array}{|c}-۰٫۵\\ -۱۲\end{array} \rightarrow m=\frac{۱۸}{۳}=\boxed{۶} \rightarrow y=۶x-۹$

$\rightarrow Ⓐ\ ۶x-۹=\frac{a}{۲x-۱}$ $\quad \overset{-۳}{\cancel{۶-۹}}=\frac{a}{\underset{۱}{\cancel{۲-۱}}} \rightarrow \boxed{a=-۳}$

(۲)

$\rightarrow Ⓑ\ \frac{-۲a}{(۲x-۱)^{۲}}=\frac{-\overset{۱}{\cancel{۲}}}{(۲x-۱)}\times \boxed{\frac{a}{(۲x-۱)}}=\overset{-۳}{\cancel{۶}} \rightarrow \frac{۶x-۹}{۲x-۱}=-۳ \rightarrow -۶x+۳=۶x-۹ \rightarrow ۱۲x=۱۲ \rightarrow \boxed{x=۱}$

$\rightarrow ۶x-۹$

$\rightarrow f(x)=\frac{-۳}{۲x-۱} \rightarrow f(۵)=\frac{-۳}{۱۰-۱}=\frac{-۳}{۹}=\boxed{\frac{-۱}{۳}}$ ✓

(۴)

$x=۱ \rightarrow y=\frac{۱+a}{a+۱}=۱ ,\ y=۲+b \rightarrow ۲+b=۱ \rightarrow \boxed{b=-۱}$

$y'=\frac{(۱)(ax+۱)-(x+a)(a)}{(ax+۱)^{۲}} \xrightarrow{x=۱} \frac{\cancel{a}+۱-\cancel{a}-a^{۲}}{(a+۱)^{۲}}=۲ \rightarrow \frac{۱-a^{۲}}{a^{۲}+۲a+۱}=۲ \rightarrow ۲a^{۲}+۴a+۲=۱-a^{۲}$

$۳a^{۲}+۴a+۱=۰ \ ,\ a=-۱$ غ ق

$\boxed{a=\frac{-۱}{۳}}$

$\rightarrow a-b=\frac{-۱}{۳}+۱=\boxed{\frac{۲}{۳}}$ ✓

(۲)

s.a.m

$f(x)=g(x) \rightarrow \sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x \rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}\cos x=\cancel{\frac{۱}{۲}}\sin x \rightarrow \tan x=۱ \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۴}}$ ⑤

$\rightarrow f(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+\frac{۱}{۲})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow$ نقطه تماس $(\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴})$

$f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۴}} \rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x+b \xrightarrow{(\frac{\pi}{۴} و \frac{۳\sqrt{۲}}{۴})}$ ②

$\rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۶}+b \rightarrow b=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(۳-\frac{\pi}{۴}) \longrightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۴}x+\frac{\sqrt{۲}}{۴}(۳-\frac{\pi}{۴}) \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور } x \text{ها}]{y=۰} \frac{\sqrt{۲}}{۴}x+\frac{\sqrt{۲}}{۴}(۳-\frac{\pi}{۴})=۰$

$\rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۴}-۳}$ ✓

$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱ \longrightarrow f'(x)=۰ \rightarrow ۶x^۲-۶x-۱۲=۰$

- $x=-۱ \rightarrow f(-۱)=۸=A$
- $x=۲ \rightarrow f(۲)=-۲۹=B$

$m_{AB}=\frac{۸-(-۲۹)}{-۱-۲}=\boxed{\frac{۳۷}{-۳}}$ ⑥

$\rightarrow f'(x)=\frac{-۳۷}{۳} \longrightarrow ۶x^۲-۶x-۱۲=-\frac{۳۷}{۳} \Rightarrow ۶x^۲-۶x+\frac{۱}{۳}=۰ \rightarrow x=\frac{۶\pm\sqrt{۳۶-۸}}{۱۲}=\frac{۶\pm۲\sqrt{۷}}{۱۲}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{۲ نقطه}}$ ✓

②

سوال ۷

$y=Kx^{۳}+(K+۱)x^{۲}\rightarrow y'=۳Kx^{۲}+۲(K+۱)x\rightarrow y''=۶Kx+۲(K+۱)=۰$

$x=\frac{-K-۱}{۳K}\xrightarrow[\text{ناحیه دوم}]{\text{نقطه عطف در}}-\frac{K+۱}{۳K}<۰\rightarrow \begin{array}{c|c|c} & -۱ & ۰ \\ - & + & - \end{array}\rightarrow\boxed{K<-۱\ ,\ K>۰\ \ (I)}$ $\quad (I)\cap(II)\rightarrow K>۰$

$\rightarrow -\frac{K+۱}{۳K}K+K+۱>۰\rightarrow -\frac{K+۱}{۳}+K+۱>۰\rightarrow\frac{۲K+۲}{۳}>۰\rightarrow K+۱>۰\rightarrow\boxed{K>-۱\ \ (II)}$

هیچ مقدار صحیح و منفی نیست

سوال ۱۸

$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{۳a}\rightarrow x=\frac{-a}{۳}\rightarrow\frac{-a}{۳}=-۱\rightarrow\boxed{a=۳}$ $\quad \frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$

$-۴=-۱+۳-b-۱\rightarrow\boxed{b=۵}$

سوال ۹

$f(۰)=۴\rightarrow(۰)^{۳}+a(۰)+b(۰)+c=۴\rightarrow\boxed{c=۴}$

$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\rightarrow f'(۰)=۰\rightarrow f'(۰)=۳(۰)^{۲}+۲a(۰)+b=۰\rightarrow\boxed{b=۰}$

$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+۴\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲ax=۰\rightarrow x(۳x+۲a)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=\frac{-۲a}{۳}\end{cases}$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & -\frac{۲a}{۳} & \\ \hline y' & + & | & - & | & + \\ \hline y & \nearrow & | & \searrow & | & \nearrow \\ & & & & \text{min} & \end{array}$$

$\rightarrow f(-\frac{۲a}{۳})=۰\rightarrow(-\frac{۲a}{۳})^{۳}+a(-\frac{۲a}{۳})^{۲}+۴=۰$

$\rightarrow\frac{-۸a^{۳}}{۲۷}+\frac{۴a^{۳}}{۹}+۴=۰\rightarrow a^{۳}=-۲۷\rightarrow\boxed{a=-۳}$

$x=\frac{-۲a}{۳}\rightarrow x_{min}=\frac{-۲(-۳)}{۳}=۲$

سوال ۱۰

$f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x=۰\rightarrow ۴x(x^{۲}-۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=\pm\sqrt{۳}\end{cases}\rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -\sqrt{۳} & & ۰ & & \sqrt{۳} & \\ \hline y' & - & ۰ & + & ۰ & - & ۰ & + \\ \hline y & \searrow & | & \nearrow & | & \searrow & | & \nearrow \\ & & \text{min} & & \text{max} & & \text{min} & \end{array}$$

$A(-\sqrt{۳},-۴)\ ,\ B(\sqrt{۳},-۴)\rightarrow m_{AB}=۰$

$f''(x)=۱۲x^{۲}-۱۲=۰\rightarrow ۱۲x^{۲}=۱۲\rightarrow x=\pm۱\rightarrow$ نقاط عطف $\rightarrow C(۱,۰)\ ,\ D(-۱,۰)\rightarrow m_{CD}=۰$

دو خط AB و CD ← موازی اند زاویه بین آنها صفر است