ستارنیا رضوی ۱۲/۷ ۵ تکلیف ۲۶ دوازدهم A / /

(۱

$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)} \rightsquigarrow x(1-|x|)\geqslant 0 \to$ $\begin{array}{cccc} -1 & 0 & +1 & \\ + & - & + & - \end{array}$

$f(x)= \begin{cases} \xrightarrow{x\geqslant 0} \sqrt{x-x^2} \xrightarrow{f'} \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \\ \xrightarrow{x<0} \sqrt{x+x^2} \xrightarrow{f'} \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} \end{cases}$

$D_f=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[0,1]$ ①

$f'(x)=\dfrac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}} \to 1-2|x|=0 \to x=\begin{cases}\frac{1}{2} \checkmark \\ -\frac{1}{2} \times\end{cases}$

max نسبی

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'		$+$	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$

$K=3$

$\xrightarrow{[0,1]} \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\quad 1>x>0 \longrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{(-\infty,-1]} \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}\quad x<-1 \longrightarrow$ ریشه ندارد

x	$\frac{1}{2}$	
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$ max	$\searrow$

$\to n=0,\ m=1$

نقاط صفر و $\pm1 \leftarrow$ بحرانی $\leftarrow K=4$

$K+m+n=3+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{2}}$

$m+n+K=5$

(۲

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$

⓪

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \to \begin{cases} x\geqslant 0 \\ a-2x\geqslant 0 \to x\leqslant\frac{a}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{y'=0} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-2x}}=0 \to x=\frac{a}{6}$

$\begin{cases} x=0 \to y=f(0)=\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{2} \to y=f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}} \to \min \\ x=\frac{a}{6} \to y=f(\frac{a}{6})=3\sqrt{\frac{a}{6}} \to \max \end{cases}$

$\min\times\max=\sqrt{12} \to 3\sqrt{\dfrac{a^2}{12}}=\sqrt{12} \xrightarrow{a>0} \dfrac{3a}{\sqrt{12}}=\sqrt{12}$

$3a=12 \to a=4 \to [a]=4$

(۳ ①

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$ $\begin{array}{ccc} -2 & & +2 \\ + & - & + \end{array}$

$\mathrm{I}\quad \xrightarrow{2>x>-2} \dfrac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} \longrightarrow \dfrac{4x^2-x^4}{x^2-1} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{(8x-4x^3)(x^2-1)-2x(4x^2-x^4)}{(x^2-1)^2}$

$\mathrm{II}\quad \xrightarrow{\substack{x>2 \\ x<-2}} \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \longrightarrow \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$

$\to f'(x)=\pm\dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2}=0 \longrightarrow \pm(2x^5-4x^3+8x)=0$

$\longrightarrow \pm 2x(x^4-2x^2+4)=0 \longrightarrow \begin{cases} \pm 2x=0 \to x=0 \\ x^4-2x^2+4=0 \to \times \text{ ریشه} \end{cases}$

ریشه های داخل قدرمطلق $\leftarrow \pm2 \leftarrow$ ext سه $\quad$ تعداد نقاط اکسترمم $=3$

۴)

$y=ax^3+bx^2+cx+d \to d=0$

x		0		1	
f	↘		↗		↘
f'	$-$		$+$		$-$

min نسبی $\leftarrow A(0,0)$

max نسبی $\leftarrow B(1,1)$

$y'=3ax^2+2bx+c \to c=0$

$1=a+b$

$3ax^2+2bx=0 \to x(3ax+2b)=0 \to 0$

$\to 3a+2b=0$

$2a+2b=2$

$a=-2$

$b=+3$

$\boxed{ab=-6}$

۲

---

۵)

$f(x)=x|3-x^2| \xrightarrow{\sqrt{3}>x>-\sqrt{3}} 3x-x^3 \to f'(x)=3-3x^2 \to 3(1-x^2)$

$\to x^3-3x$

$x>\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$

	-1		$+1$	
$-$		$+$		$-$
↘	min	↗		↘

min $\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$

۴

---

۶) چون نقطه $A(-1,1)$ اکسترمم نسبی است پس x ها را منفی برمی‌داریم و بعد مشتق می‌گیریم

$y=x^2|x|+3ax^2+b \to \boxed{b=+\frac{3}{2}}$

$y=-x^3+3ax^2+b \to y'=-3x^2+6ax$

$-3x(x-2a)$

$-1-2a=0$

$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$

$1+(-\frac{3}{2})+b=1$

	-1		0	
$-$		$+$		$-$
↘		↗		↘

۲

$\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\boxed{-3}$

---

۷)

$y=\frac{(ax+3)}{(a+1)x+(+a-1)}$

مجانب قائم $-\frac{1}{3} \to 6x-8=0 \to \boxed{x=\frac{4}{3}}$

مجانب افقی $\frac{7}{6} \to \frac{a}{a+1}=\frac{7}{6}=7a+7=6a$

$\boxed{a=-7}$

۱

$y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{6} \to 3x+1$

$\to$ min $\left|\begin{matrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{7}{6}\end{matrix}\right.$

	$-\frac{1}{3}$	
$-$		$+$
↘	min	↗

مجانب قائم = ریشه مخرج = $\frac{-d}{c}=\frac{1-a}{a+1}=\frac{-1}{3} \to 3-3a=-a-1 \to 2a=4 \to a=2$

$\to y=\frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \to x=\frac{-3}{2}$

/ /

۱۸)

ج

$$y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$$

$4(-\frac{1}{2})^2+a(-\frac{1}{2})+1=0 \rightarrow \frac{1}{2}a=2 \rightarrow a=4$

مجانب افقی $\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+7} \rightarrow \frac{b}{4}=3 \rightarrow b=12$

$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$

---

۱۹)

۱٫۷۵

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \longrightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}$$

تابع در دو بازه‌ی $(0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32})$ ← اکیداً نزولی

$$\longrightarrow \frac{x^3(4x^3-32-3x^3)}{(x^3-8)^2} \longrightarrow \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2} \rightarrow 0,\ +2,\ \sqrt[3]{32}$$

	0		2^*		$\sqrt[3]{32}$	
$+$		$-$		$-$		$+$
↗		↘		↘		↗

~~طول بازه min~~

$\sqrt[3]{32}$ ← نقطه‌ای که نمودار در آن به min خود می‌رسد.

0 ← کمترین طولی که در آن تابع حالت اکیداً نزولی دارد.

$(0,2) \rightarrow$ طول بازه $=2$

$(2,\sqrt[3]{32}) \rightarrow$ طول بازه $=2(\sqrt[3]{4}-1)<2 \rightarrow \min_{\text{طول بازه}}=2(\sqrt[3]{4}-1)$

---

۲۰)

۲

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3} \longrightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$\longrightarrow \frac{4x^5-12x^3-2x^5+6x}{(x^2-3)^2} \rightarrow \frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2}$$

$$\longrightarrow \frac{x(2x^4-12x^2+6)}{(x^2-3)^2} \rightarrow 0,\ \sqrt{3+\sqrt6},\ \sqrt{3-\sqrt6},\ -\sqrt{3+\sqrt6},\ -\sqrt{3-\sqrt6},\ +\sqrt3,\ -\sqrt3$$

-2, $+2$

	$-\sqrt{3+\sqrt6}$		$-\sqrt3$		$-\sqrt{3-\sqrt6}$		0		$\sqrt{3-\sqrt6}$		$\sqrt3$		$\sqrt{3+\sqrt6}$	
$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗

$[-\sqrt3,-\sqrt{3-\sqrt6}]\cup[0,\sqrt{3-\sqrt6}]$

$\cup[\sqrt3,2] \longrightarrow \boxed{\text{۳ بازه}}$