هلنا محموری

①

$$x(1-|x|)\geq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x(1-x)} & 0\leq x\leq 1\\ \sqrt{x(x+1)} & x\leq -1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0<x<1\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

← نقاط بحرانی ۱ و ۱- و $\frac{1}{2}$ و ۰

۲

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	$-$			$+$	$-$	
y	↘	0	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↘	0	

$$m+n+k=1+0+4=5$$

۲:

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow x=\frac{a}{6}$ نقطه بحرانی

★ دامنه تابع $0 \le x \le \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{a} \\ f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}} \quad \min \\ f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \quad \max \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a}=\sqrt{12} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{12}}a=\sqrt{12} \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow \boxed{a=4} \checkmark$$

۳:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\ge 2 \text{ یا } x\le -2 \\ \frac{-(x^4-4x^2)}{x^2-1} & -2<x<2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} & x>2 \text{ یا } x<-2 \\ -\frac{[(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)]}{(x^2-1)^2} & -2<x<2 \end{cases}$$

← ریشه‌های صورت هر دو قسمت یکسان هستند پس یکی از ضابطه‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$4x^5-4x^3-8x^3+8x-2x^5+8x^3=0 \Rightarrow 2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\Delta<0})=0 \quad x=0$$

← این ریشه برای ضابطه دوم f' قابل قبول است نه ضابطه اول پس ۱ اکسترمم نسبی دارد

۴:

$y'=3ax^2+2bx+c \xrightarrow{x=0} y'=0+0+c=0 \Rightarrow c=0$

$y=ax^3+bx^2+cx+d \xrightarrow[y=0]{x=0} d=0 \Rightarrow y=ax^3+bx^2$

نقطه (۱و۱) اکسترمم نسبی تابع است.

$y=ax^3+bx^2 \xrightarrow[y=1]{x=1} 1=a+b \Rightarrow a=1-b$

$y'=3ax^2+2bx \xrightarrow{x=1} 3a+2b=0 \rightarrow 3(1-b)+2b=0 \Rightarrow 3-3b+2b=0$

$\Rightarrow b=3 \Rightarrow a=-2 \qquad a \times b=-2\times 3=-6 \checkmark$

۶: ★ در همسایگی $x=-1$ مقدار x منفی است ⇐ (۱و۱-) اکسترمم نسبی

$y=x^2(-x)+3ax^2+b \Rightarrow y=-x^3+3ax^2+b$

$y'=-3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-x^3-\frac{3}{2}x^2+b$

★ نقطه (۱و۱-) در تابع صدق می‌کند

$1=-(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2+b \Rightarrow 1=1-\frac{3}{2}+b \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

$\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3 \checkmark$

$$y' = \frac{4x^3(x^3-8) - 3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} \Rightarrow x^6 - 32x^3 = 0 \quad : (4)$$

$$\Rightarrow x = 0 \; / \; x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$$

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y'	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$ مجانب قائم	$\searrow$		$\nearrow$

★ تابع در بازه‌های $(0, 2)$ و $(2, 2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است

که بازه کوچکتر $\Rightarrow$ Min طول بازه $= 2(\sqrt[3]{4} - 1)$