۱۲

حلنا محموری

(۱)

$x(1-|x|)\geq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x(1-x)} & 0\leq x\leq 1\\ \sqrt{x(x+1)} & x\leq -1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0<x<1\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}$$

که نقاط بحرانی ۱ و ۱- و $\frac{1}{2}$ و ۰

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'	$-$				$+$	0	$-$			
y	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0		

(۲)

$m+n+k=1+0+4=5$ ✓

(۲): نقطه بحرانی

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=0 \Rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x=4x \Rightarrow x=\frac{a}{6}$$

* دامنه تابع $0 \le x \le \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} f(0)=\sqrt{a} \\ f(\frac{a}{2})=\sqrt{\frac{a}{2}} & \text{min} \\ f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} & \text{max} \end{cases}$$

۲

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}\times\frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a}=\sqrt{12} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{12}}a=\sqrt{12} \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

(۳):

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x\ge 2 \text{ یا } x\le -2 \\ \frac{-(x^4-4x^2)}{x^2-1} & -2<x<2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\begin{cases} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} & x>2 \text{ یا } x<-2 \\ -\frac{[(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)]}{(x^2-1)^2} & -2<x<2 \end{cases}$$

۲

← هر ریشه‌های هر دو قسمت یکسان هستند پس یکی از ضابطه ها را مساوی صفر قرار می دهیم

$$4x^5-4x^3-8x^3+8x-2x^5+8x^3=0 \Rightarrow 2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4-2x^2+4}_{\Delta<0})=0 \quad x=0$$

← این ریشه برای ضابطه دوم f' قابل قبول است نه ضابطه اول پس ۱ اکسترمم نسبی دارد

(۴):

$$y'=3ax^2+2bx+c \xrightarrow{x=0} y'=0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \xrightarrow[y=0]{x=0} d=0 \Longrightarrow y=ax^3+bx^2$$

۲

نقطه (۱و۱) اکسترمم نسبی تابع است.

$$y=ax^3+bx^2 \xrightarrow[y=1]{x=1} 1=a+b \Rightarrow a=1-b$$

$$y'=3ax^2+2bx \xrightarrow{x=1} 3a+2b=0 \rightarrow 3(1-b)+2b=0 \Rightarrow 3-3b+2b=0$$

$$\Rightarrow b=3 \Rightarrow a=-2 \qquad a\times b=-2\times 3=-6$$

(۶): * در همسایگی $x=-1$ مقدار x منفی است ⇐ (۱و۱-) اکسترمم نسبی

$$y=x^2(-x)+3ax^2+b \Rightarrow y=-x^3+3ax^2+b$$

$$y'=-3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-x^3-\frac{3}{2}x^2+b$$

* نقطه (۱و۱-) در تابع صدق می کند.

$$1=-(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2+b \Rightarrow 1=1-\frac{3}{2}+b \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$$

۲

$$y' = \frac{4x^3(x^3-8) - 3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} \Rightarrow x^6 - 32x^3 = 0$$: (4)

$\Rightarrow x = 0 \ / \ x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y'	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$

مجانب قائم

۲

★ تابع در بازه‌های $(0,2)$ و $(2, 2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است

کل بازه $\Rightarrow$ Min طول بازه $= 2(\sqrt[3]{4} - 1)$

سوال ۵)

$$f(x)=\begin{cases} x(3-x^2) & ; -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3} \\ x(x^2-3) & ; x\geq\sqrt{3},\ x\leq-\sqrt{3}\end{cases} \longrightarrow f(x)=\begin{cases} -x^3+3x & ; -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3} \\ x^3-3x & ; x\geq\sqrt{3},\ x\leq-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\longrightarrow f'(x)=\begin{cases} -3x^2+3 & ; -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \\ 3x^2-3 & ; x>\sqrt{3},\ x<-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$f'_-(-\sqrt{3})=6 \qquad f'_+(-\sqrt{3})=-6$$

$$f'_-(\sqrt{3})=-6 \qquad f'_+(\sqrt{3})=6$$

$\longrightarrow$ تابع در $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست

$$f'(x)=0 \longrightarrow 3-3x^2=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1$$

نقاط بحرانی $\longrightarrow$

$$\begin{cases} x=-1.5 \longrightarrow f(-1.5)=-1.125 \\ x=-1 \longrightarrow f(-1)=-2 \\ x=1 \longrightarrow f(1)=2 \\ x=\sqrt{3} \longrightarrow f(\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ min مطلق در بازه $=-2$

سوال ۷)

$$x_{min}=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{-1}{3}$$

مجانب قائم = ریشه مخرج = $\frac{-d}{c}=\frac{1-a}{a+1}=\frac{-1}{3} \longrightarrow 3-3a=-a-1 \longrightarrow 2a=4 \longrightarrow a=2$

$$\longrightarrow y=\frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \longrightarrow x=\frac{-3}{2}$$

سوال ۸)

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+a\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \longrightarrow \frac{1}{2}a=2 \longrightarrow a=4$$

مجانب افقی $\longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+7} \longrightarrow \frac{b}{4}=3 \longrightarrow b=12$

$$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

سوال ۱۰)

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x\left((2x^4-6x^2)-(x^4-3)\right)}{(x^2-3)^2}$$

$$2x^5-12x^3+6x=0 \longrightarrow 2x(x^4-6x^2+3)=0 \longrightarrow \{x=0$$

$$\longrightarrow x^4-6x^2+3=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-6t+3=0 \longrightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}=3\pm\sqrt{6} \longrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3-\sqrt{6}} \\ x=\pm\sqrt{3+\sqrt{6}} \end{cases}$$ غ ق ق

x		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	ت ن	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	ت ن	$+$

$\longrightarrow$ در ۳ بازه اکیداً نزولی