«مبینا عالشن الحسینی» ۱۸ «دوازدهم تجربی A.»

۱ـ

$g(x) = f(\tan^۲ x + \sqrt{۲}\cos x) \qquad g'(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۳}$

$g'(x) = ۲\tan x(۱+\tan^۲ x) - \sqrt{۲}\sin x \qquad f'(۲) = ?$

$g'(x) = (۲\tan x(۱+\tan^۲ x) - \sqrt{۲}\sin x)\,f'(\tan^۲ x + \sqrt{۲}\cos x)$ ۲

$\underbrace{g'(\frac{\pi}{۴})}_{\sqrt{۳}}\ (۲\cancel{\tan\frac{\pi}{۴}}^{۱}(۱+\cancel{\tan^۲\frac{\pi}{۴}}^{۱}) - \sqrt{۲}\sin\frac{\pi}{۴})\,f'(\cancel{\tan^۲\frac{\pi}{۴}}^{۱} + \sqrt{۲}\times\cancel{\cos\frac{\pi}{۴}})$

$\sqrt{۳} = (۲ - \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))\,f'(۲) \Rightarrow \sqrt{۳} = ۳f'(۲) \Rightarrow \boxed{f'(۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}}$ ✓

۲ـ

$f(x) = \frac{۸+\cos^۳ x}{۴-\cos^۲ x} \qquad g(x) = \frac{۳}{۲-\cos x}$

$f'(\frac{۷\pi}{۶}) - ۲g'(\frac{۷\pi}{۶}) = ? \quad (f-۲g)'(\frac{۷\pi}{۶})$

$f(x) = \frac{\cancel{(۲+\cos x)}(\cos^۲ x - ۲\cos x + ۴)}{(۲-\cos x)\cancel{(۲+\cos x)}} = \frac{\cos^۲ x - ۲\cos x + ۴}{۲-\cos x}$

$f - ۲g = \frac{\cos^۲ x - ۲\cos x + ۴ - ۶}{۲-\cos x} = \frac{\cos^۲ x - ۲\cos x}{۲-\cos x}$ ۲

$f - ۲g = \frac{\cos x(\cos x - ۲)}{۲-\cos x} = -\cos x \Rightarrow (f-۲g)'(x) = \sin x$

$\Rightarrow (f-۲g)'(\frac{۷\pi}{۶}) = \sin\frac{۷\pi}{۶} = \boxed{-\frac{۱}{۲}}$ ✓

۳ـ

$f(x) = |۴x-۳|\sqrt{ax}$

$\frac{۳}{۴}$

$-\ |\ +$

$f'_+(\frac{۳}{۴}) - f'_-(\frac{۳}{۴}) = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow a = ?$ ۲

$f'_+(\frac{۳}{۴}) \rightsquigarrow f(x) = (۴x-۳)\sqrt{ax} \to f'(x) = ۴\sqrt{ax} \to ۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a}$

$f'_-(\frac{۳}{۴}) \rightsquigarrow f(x) = -(۴x-۳)\sqrt{ax} \to f'(x) = -۴\sqrt{ax} \to -۴\sqrt{\frac{۳}{۴}a}$

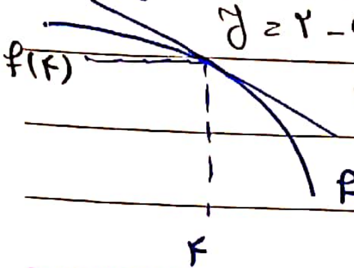
$۸\sqrt{\frac{۳}{۴}a} = ۲\sqrt{۶} \to \frac{\cancel{۶۴}^{۴\ ۱۶}\times\cancel{۳}a}{\cancel{۴}} = ۴\times\cancel{۶}^{۲} \Rightarrow \boxed{a = \frac{۱}{۲}}$ ✓

Scanned with CamScanner

-۴

$y+ax=۲$ $\quad f(۴)+f'(۴)=-۱ \Rightarrow f'(۴)=?$

$y=۲-ax$



$f(۴)=۲-۴a$
$f'(۴)=-a$
$\Rightarrow ۲-۴a-a=-۱$
$۲-۵a=-۱$
$۳=۵a \Rightarrow a=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \boxed{f'(۴)=\frac{-۳}{۵}}$ ✓

۲

-۵

مماس $\begin{cases} ۷y-x=۵ \\ y=\dfrac{ax-۱}{۳x+۱} \end{cases}$ $\quad a=?$ $\quad \frac{۵+x}{۷}=y$

$\frac{۵+x}{۷}=\frac{ax-۱}{۳x+۱} \Rightarrow ۱۵x+۵+۳x^۲+x=۷ax-۷$

$۳x^۲+(۱۶-۷a)x+۱۲=۰$

۲

$x^۲+\left(\frac{۱۶-۷a}{۳}\right)x+۴=۰$

$\frac{۱۶-۷a}{۳}=۴ \rightsquigarrow (x+۲)^۲=۰$ یا $\frac{۱۶-۷a}{۳}=-۴ \rightsquigarrow (x-۲)^۲=۰$

$x=-۲$ X $\quad x=۲$ ✓ ناحیه اول

$۱۶-۷a=۱۲$ $\quad ۱۶-۷a=-۱۲$

$۴=۷a \rightarrow a=\frac{۴}{۷}$ X ✓ $\quad \boxed{۲۸=۷a \Rightarrow a=۴}$

$f(x)=x^۳+ax-b \rightarrow f'(x)=۳x^۲+a$

افقی [illegible] مماس $x=۲ \rightarrow f'(۲)=۰$ $\quad f'(۲)=۱۲+a=۰ \Rightarrow a=-۱۲$ $\quad b-a=-۱۶-(-۱۲)=-۴$

$b-a=?$ ۱٫۵ $\quad \hookrightarrow f(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۲(-۱۲)-b=۰$

$\Rightarrow b-a=۱۶+۱۲=\boxed{۲۸}$ $\quad ۸-۲۴-b=۰ \Rightarrow b=۱۶$

$۲a-b=-۸ \xrightarrow{a=-۱۲} b=-۱۶$

$f(x)=\sin^n(x^۲)$ $\quad ۲m+n=?$ $\quad ۷$

$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)\,f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=۳۲\sqrt{۲}$

$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^n(x^۲)\times n\sin^{n-۱}(x^۲)\times \cos(x^۲)\times(۲x)}{(۲\sin^۲\frac{x}{۲})^m}$

$f'(x)=n\sin^{n-۱}(x^۲)\times ۲x\times\cos x^۲$

$\xrightarrow{} \lim_{x\to ۰}\frac{(x^۲)^n\,n\,(x^۲)^{n-۱}\times ۲x}{(۲(\frac{x}{۲})^۲)^m}=$

$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x\,n\sin^{n-۱}(x^۲)\times\cos x^۲(\sin^n(x^۲))}{(۱-\cos x)^m}$

$\lim_{x\to ۰}\frac{۲nx^{۲n+۲n-۲+۱}}{(\frac{x^۲}{۲})^m}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲nx^{۴n-۱}}{\frac{۱}{۲^m}x^{۲m}}$

۱٫۵

$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x\times n\times x^۲(۱-\frac{x^۴}{۲})(x^۲)}{(\frac{x^۲}{۲})^m}=۳۲\sqrt{۲}$

$\lim_{x\to ۰} ۲^{m+۱}\,n\,x^{۴n-۲m-۱}$

حاصل حد عدد غیر متناهی غیرصفر ← توان صفر شد

$\begin{cases} ۴n - ۲m - ۱ = ۰ \longrightarrow n = \frac{۲m+۱}{۴} \\ ۲^{m+۱} n = ۳۲\sqrt{۲} \end{cases} \longrightarrow ۲^{m+۱} \times \frac{۲m+۱}{۴} = ۳۲\sqrt{۲} \to (۲m+۱)۲^{m+۱} = ۲^{۷}\sqrt{۲} \longrightarrow m = \frac{۷}{۲}$ $\quad n = ۲$ $\quad ۲m+n = ۹$

۸ـ شیب خط مماس بر $f^{-1}(x)$ در $x=۲$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$

$f^{-1} \begin{array}{|c} ۲ \\ ? \end{array} \longrightarrow f \begin{array}{|c} ?=۹ \\ ۲ \end{array}$

$\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} = ۲ \Rightarrow x = ۹$

④

$f'(x) = \frac{-۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲} \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$f'(۹) = \frac{-۲}{(۲)^۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{-۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{-۱}{۱۲}$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در $x=۲$ برابر -۱۲ است ✓

۹ـ $f(x) = (x^۲+۱)^۳(\frac{-۱}{۲}x+۱)$

$[-۱, ۰] \longrightarrow$ آهنگ متوسط $= -۱۱ \longrightarrow \frac{f(۰) - f(-۱)}{۱} = -۱۱$

$f'(-۲x) = ?$ $\qquad ۱ - (۸(-x+۱)) = -۱۱$

②

$f'(-\frac{۱}{۲} \times ۲) = f'(+۱) = ?$ $\quad ۱ - (-۸x+۸) = -۱۱ \Rightarrow \overset{-۷}{\cancel{۱}} + ۸x - \cancel{۸} = \overset{-۴}{\cancel{-۱۱}} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲}$

$f'(x) = ۳(x^۲+۱)^۲(۲x)(\frac{-۱}{۲}x+۱) + (\frac{-۱}{۲})(x^۲+۱)^۳$

$f'(-۱) = ۳(۴)(\cancel{-۲})(\frac{۱}{\cancel{۲}}) + (\frac{-۱}{۲})۸ = ۱۲ - ۴ = \boxed{۸}$ ✓

۱۰ـ $[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}]$

$f(x) = \sin x \cos ۲x$

④

$g(x) = \sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ x - \cos^۲ x = -\cos ۲x$

$\frac{f(\frac{\pi}{۲}) - f(\frac{\pi}{۴})}{g(\frac{\pi}{۲}) - g(\frac{\pi}{۴})} = \frac{-۱ - ۰}{+۱ - ۰} = \boxed{-۱}$ ✓