۱۴٫۵

بسم الله الرحمن الرحیم

فاطمه شعبانی

۱)

$$f(x)=\begin{cases} a+\sqrt{x^2} & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1\end{cases}$$

$a-b=-1 \rightarrow a-\frac{3}{2}=-1 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$

در ۱ پیوسته ⇐ $a+1=b \rightarrow a-b=-1$ ۰٫۵

طرفین عدد $x\geq 1$ را در $x=x$ یعنی نقطه [illegible] مشتق‌پذیر است؟

$f'(1) \rightarrow 0+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\times b$

یا

$\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\times b \rightarrow b=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4} \rightarrow a-\frac{3}{4}=-1$

$a=-\frac{1}{4}$

$\hookrightarrow a+b=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$f'_+(1)=f'_-(1) \rightarrow 1=\frac{2}{3}b\times x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow 1=\frac{2}{3}b(1)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow b=\frac{3}{2}$

۲)

$f(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $f'(1)-2g'(1)=?$

[illegible]

$$-\frac{2\sqrt{|x-2|^2}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\frac{\overbrace{2|x-2|}^{\cancel{4}-\cancel{2x}}}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2|\cancel{x}-x|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{-2\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=-2\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{6}}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{7}{6}}\xrightarrow{x=1}\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

۲

۳)
$$\begin{cases} bx+c & ; x<a \\ \frac{1}{x} & ; x \geq a \end{cases} \rightarrow \mathbb{R}$$ مشتق‌پذیر

$ac = ?$ → در a پیوسته است $= ab + c = \frac{1}{a}$

به دلیل $a \neq 0$ هم پیوسته است ←

مشتق → $b = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{b} b = -\frac{1}{a^2} \rightarrow a^2 b = -1$

با ۲ رابطه → $\underbrace{a^2 b}_{-1} + ac = 1 \rightarrow \boxed{ac = 2}$ ✓

②

۴)
$$\begin{cases} b & ; x<a \\ b+(x-a)^m & ; x \geq a \end{cases}$$ ([illegible]) $m = ?$

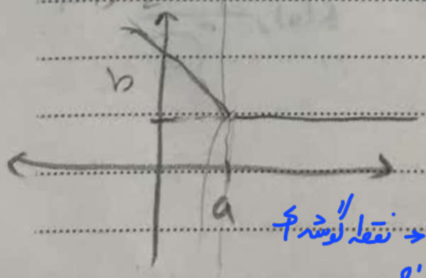
①

نقطه‌ی شکستگی تابع باید پیوسته باشد تا مشتق‌پذیر ← مشتق در b صفر است ↓

ها

$0 \neq 0 + \underbrace{m(x-a)^{m-1}} \times 1$

$m \neq 0$ ← نباید صفر شود



نقطه‌ی گوشه؟ → $f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$m=0 \rightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$ × غ ق ق

$m=1 \rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases} \rightarrow f'_-(a) \neq f'_+(a)$

$m \geq 2 \rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 0 \end{cases} \rightarrow f'_-(a) = f'_+(a)$ غ ق ق

یک مقدار صحیح m

تابع $g(x)$ ← برای مقادیر مثبت تعریف نشده ← برای مقادیر منفی : $g(x) = \frac{1}{2x^3}$

تابع $f(x)$ ← برای مقادیر منفی تعریف شده است : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$

۵) $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x - |x|}}$

$g'(-\sqrt[3]{4})\, f'(g(-\sqrt[3]{4})) = ?$

$\downarrow$

۵

$(fog)'(-\sqrt[3]{4}) \Rightarrow$

$fog(x) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 \times \left(\frac{1}{2x^3}\right)}} = x \rightarrow$

$fog(x) = x \rightarrow (fog(x))' = 1$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - |x^3| - |\underbrace{x^3 - |x^3|}|}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{4}}$$

منفی

$+x^3 - |x^3|$

$x^3 + x^3 + |x^3| + x^3 = 4x^3$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}\,x^2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4}} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt[3]{2}}}$$

۶) $y = -ax - d \longrightarrow f'(3) - f(3) = 2$ $\frac{f(3)}{f'(3)} = ?$

$y = \underbrace{-a}_{f'(3)}x - d \rightarrow f'(3) - f(3) = 2$

$\downarrow$

$-a - (-3a - d) = 2$

$f(3) = -3a - d$

$-a + 3a + d = 2 \rightarrow 2a + d = 2 \rightarrow$

$2a = -3 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{-3 \times -\frac{3}{2} - d}{-\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{9}{2} - d}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$a = \frac{-3}{2}$

$\rightarrow \boxed{-\frac{1}{3}}$ ✓

۴

$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{\sqrt{۸}} (\frac{۱}{۸})^{-\frac{۴}{۳}} = \frac{-۲}{\sqrt{۸}} \times ۲^{۴} = -\frac{۲^{۵} \times \sqrt{۲}}{۲^{۲}} = -۲^{۳}\sqrt{۲} \rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -۸\sqrt{۲}$

$f(x) = ۱۶x^{۲}+۱ \rightarrow f'(x) = ۳۲x \xrightarrow{x=۲} f'(۲) = ۶۴$

(۲)۵ = ۴

۷) $f(x) = (x[x^{۲}+\frac{۱}{۲}])^{۳}+۱ \quad g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}$ ①

fog در $x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}$ $(-۱۲۸\sqrt{۲})$

$\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}} = ۲$ ✓ $\frac{۱}{۸}$

$(fog)' = \underbrace{g'(x)} f'(g(x)) =$

$\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{۲}}} \times ۶۴ =$ $\frac{۹}{۸}-۱ = \frac{۱}{۸}$

$\frac{\cancel{۳\times۲}}{\cancel{۲}\sqrt{۲}} \times ۴$ $\frac{\frac{۴}{\sqrt{۲}} \times \cancel{۶۴}}{\cancel{۳۲} \sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \boxed{-۱}$

$f'(x) = ۲(x\underbrace{[x^{۲}+\frac{۱}{۲}]})^{۲}(۴) = ۳۲x = ۶۴$ ✓

$y' = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) f'(۲) \overset{x=۲}{=} -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = ۴ \times (-۱۲۸\sqrt{۲}) \rightarrow$ ۴ برابر

۸) $g(x) = f(x+۱) + f(۳x+۱۰)$

$T = ۵ \rightarrow f'(-۱) = \frac{۳}{۲}$

$\hookrightarrow g'(-۲) = ?$ ②

$g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$

$g'(-۲) = f'(-۱) + \underbrace{۳f'(۴)}_{+۵ \rightarrow} = ۴f'(-۱) = ۴ \times \frac{۳}{۲} = \boxed{۶}$ ✓

۹) $f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x+۳}$

$\lim_{h \to ۰} \frac{f^{۲}(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)}$

$\hookrightarrow$ Hop: $\frac{۲(f(۵-h))(-f'(۵-h)) + ۳f'(۵-h)}{(۵-h) - h} =$

$\frac{۲f(۵)(-f'(۵)) + ۳f'(۵)}{۵} = \frac{\cancel{۲\times۲} \times -\frac{۲۵}{۳\times۴} + \frac{۲۵}{۴}}{۵} =$

۱۴۰۴/۹/۱

$f(۵) = ۲$ ②

$f'(۵) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^{۲}}} \times (x-۲) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$

۹) مثل ←

$$\frac{\frac{-۱۰۰+۷۵}{۱۲}}{۵} = \frac{\frac{-\cancel{۲۵}^{۵}}{۱۲}}{\cancel{۵}} = \boxed{\frac{-۵}{۱۲}}$$

۱۰)

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \perp ۴y - ۲x = ۱$

$۴y = ۲x + ۱ \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۱$

$m = -۲ \leftarrow$ عمود

$۲x - ۴ = -۲ \rightarrow ۲x = ۲ \rightarrow \underline{x = ۱} \rightarrow \boxed{(۱, ۲)}$

$y = \underbrace{۱ - ۴ + ۵}_{} = ۲$

۲