

تکالیف حتماً حقیقی
 $g(x) = ((t, m), (n, p+1), (p+1, -1), (-1, p+k))$ تابع ثابت و $f(x) = (x+1)' + (px-1)' + mx' + nx + mn$ اگر

تابع باشد، حاصل $m+n+p+k$ را بیابید. -1
 ① $f(x) = k$ زیرا ثابت $f(x) = x^2 + px + 1 + 9x^2 + 1 - 4x + mx^2 + nx + mn$
 $(10+m)x^2 + (n-4)x + 2+mn = 0 \Rightarrow m = -10$
 $\Rightarrow n = 4$ چون ثابت این ضرب

② $g(x) \Rightarrow (t, p+1) = (f, p+1)$
 $p+1 = -10 \Rightarrow p = -11$
 $g(x) \Rightarrow (-1, -1) = (-1, -11+k)$
 $-1 = -11+k \Rightarrow k = 10$
 $m+n+p+k = -10 + 4 - 11 + 10 = -7$

الف) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x-1}}$ $\frac{-2}{-1} + \frac{2}{1} = 0$ $D_f = (-2, +\infty) - \{1\}$ -2
 $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$
 $(t-2)(t+1) = 0$
 $t = 2 \Rightarrow x = 2$ $t = -1 \Rightarrow x^2 = -1$ (تفاوت)

ب) $f(x) = \frac{2x^2+1}{4-2[-x]}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow x = 2$ $2 \leq -x < 3$ $-2 \leq x < -3$
 $4-2[-x] = 0 \Rightarrow -2[-x] = 0 \Rightarrow x = 0$
 $D_f = \mathbb{R} - \{x < -2\}$

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ $\frac{-1}{-1} + \frac{1}{1} = 0$ $D_f = [1, +\infty)$ -3
 $x \geq 0$ $x(x^2-1) \geq 0$ $x \geq 1$ $x \leq 0$ $x(x^2-1) \leq 0$ $x \leq -1$

ب) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-x^2}}{|x|-1}$ $x-2-x^2 \geq 0$ $x^2+x-2 \leq 0$ $(x+2)(x-1) \leq 0$ $-2 \leq x \leq 1$
 ① $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
 $x-2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$
 $x-2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$

$D_f = \text{①} \cap \text{②} \Rightarrow -2 \leq x < 1 - \{ -1 \}$

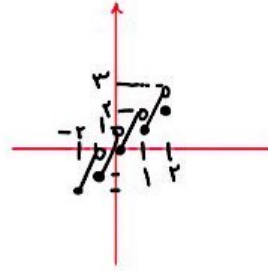
دامنه تابع $y = \frac{1}{||x-2|-1|-k}$ شامل ۳ عدد صحیح نیست. مقدار k را بیابید. -4

$|x-2|-1 = 1 \Rightarrow x-2 = 2 \Rightarrow x = 4$
 $|x-2|-1 = -1 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$
 $|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$
 $D_f = \mathbb{R} - \{2, 0, 4\}$
 $|x-2|-1 = k \Rightarrow x-2 = k+1 \Rightarrow x = k+3$
 $|x-2| = k+1 \Rightarrow x-2 = k+1 \Rightarrow x = k+3$
 $|x-2| = -k+1 \Rightarrow x-2 = -k+1 \Rightarrow x = -k+3$
 $x-2 = k+1 \Rightarrow x = k+3$
 $x-2 = -k+1 \Rightarrow x = -k+3$
 $x-1 = -x+3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow k = 1$

-5

مودار تابع $y = 2x - [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 & y = 2x + 2 &\rightarrow x = -2 \quad y = -2 \\ & & &\rightarrow x = -1 \quad y = 0 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 & y = 2x + 1 &\rightarrow x = -1 \quad y = -1 \\ & & &\rightarrow x = 0 \quad y = 1 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 & y = 2x &\rightarrow x = 0 \quad y = 0 \\ & & &\rightarrow x = 1 \quad y = 2 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 & y = 2x - 1 &\rightarrow x = 1 \quad y = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow y = 2 & &\rightarrow x = 2 \quad y = 3 \end{aligned}$$



-6

اگر b و $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + a}$ یک تابع همانی باشد، مجموعه مقادیرهای $a - b$ کدام است؟
 $f(x) = x$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{x+a} + b = x$$

صورت اول $a = -1 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} + b = x \Rightarrow b = 2 \quad a - b = -1 - 2 = -3$

صورت دوم $a = -2 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} + b = x \Rightarrow b = 1 \quad a - b = -2 - 1 = -3$

-7

توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & ; x \neq \pm 1 \\ \frac{ax + 1}{x + b} & ; x = \pm 1 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ برابر باشند، حاصل $b + c$ چقدر است؟

برای $x = 1$ (جمع فریب منفر) $x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x+3)$ پس $x = 1$ از ریشه ها

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} = x + 2 = g(x) = x + c \Rightarrow c = 2$$

برای $x = -1$ $x^2 + 2x - 1 = (x+1)(x-3)$ پس $x = -1$ از ریشه ها

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1} = x + 2 = g(x) = x + c \Rightarrow c = 2$$

از $\frac{x+3}{x+1} = x + 2$ داریم $x + 3 = (x + 2)(x + 1) \Rightarrow x + 3 = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$

از $\frac{x-3}{x-1} = x + 2$ داریم $x - 3 = (x + 2)(x - 1) \Rightarrow x - 3 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

از $\frac{x+3}{x+1} = x + 2$ داریم $\frac{a+2}{1+b} = 3 \Rightarrow a+2 = 3+3b \Rightarrow a-3b = 1$

از $\frac{x-3}{x-1} = x + 2$ داریم $\frac{-a+2}{-1+b} = 1 \Rightarrow -a+2 = b-1 \Rightarrow -a-b = -3 \Rightarrow a+b = 3$

از $a-3b = 1$ و $a+b = 3$ داریم $b = \frac{1}{2}$ و $a = \frac{5}{2}$

پس $b + c = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

-8

اگر $f(x) = \sqrt{bx - cx + k} - 1$ و $g(x) = \sqrt{bx - cx + k}$ داشته باشیم و مقدار $fa - \frac{b}{c} - k$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \sqrt{bx - cx + k} - 1 &= \sqrt{bx - cx + k} \\ \sqrt{bx - cx + k} - \sqrt{bx - cx + k} &= -1 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

$$fa - \frac{b}{c} - k = 1 - 2 + 1 = 0$$

برای دو تابع $f(x) = \sqrt{m-x} + n$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ اگر $D_{f+g} = [-1, 7]$ و $f-g(x) = 4\sqrt{2}$ حاصل $m+n$ کدام است؟ -9

$$D_f \cap D_g \Rightarrow x \geq -1 \cap x \leq 7 = -1 \leq x \leq 7$$

$$0 \leq x \leq 7$$

$$f(x) - g(x) = \sqrt{7-x} + n - \sqrt{x+2} = 4\sqrt{2}$$

$$n = 8\sqrt{2} - 7$$

$$m+n = 7 + 8\sqrt{2} - 7 = 8\sqrt{2}$$

معادله‌ی مقابل در بازه‌ی $[-2, 2]$ چند جواب دارد (در تعداد جواب از رسم کمک بگیرید). -10

(جواب)

$$y = \frac{1}{x} (x - [x]) = \frac{1}{x}$$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \quad x+2=y \Rightarrow x=-1, y=1$
 $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \quad x+1=y \Rightarrow x=0, y=1$
 $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \quad x=y \Rightarrow x=1, y=1$
 $1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \quad x-1=y \Rightarrow x=2, y=1$
 $x=2 \Rightarrow y=0$

