تکلیف ۲ — دوازدهم ریاضی A — مثنی نکویی

۲۰

۱- تابع ثابت $f(x)=c$ ← ضریب x ها و x باید صفر باشد

$$f(x)=\underbrace{x^2+9x^2+mx^2}+2x-6x+nx+\underbrace{1+1+mn}_{2+(-40)=-38}=0$$

$1+9+m=0 \to m=-10$ ✓ $\to mn=-10\times4=-40$

$\underbrace{2-6}_{-4}+n=0 \to n=4$ ✓

$m+n+p+k=$
$-10+4+10\underbrace{-11}_{-1}=-7$ ✓

$g(x)=\{(3,-10),(3,p+1),(-9,p+k),(p+4,-1)\}$

$p+1=-10$
$p=-11$ ✓

$p+k=-1 \Rightarrow -11+k=-1 \to k=10$ ✓

۲- الف) $g=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^4-2x^2-8}}$ $\xrightarrow{\text{زیر رادیکال با فرض جواب نامنفی است}}$ $\dfrac{x-2}{(x^2-4)(x^2+2)}>0$ $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$(x-2)(x+2)$ — (x^2+2) همواره مثبت

$x-2=0,\ x=2$ — $x+2=0,\ x=-2$

$x-2=0 \to x=2$

x		-2		2	
	$-$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$+$

$D=(-2,+\infty)-\{2\}$ ✓

ب) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{4-2[-x]}$ $\xrightarrow[\text{صفر باشد}]{\text{مخرج نباید}}$ $4-2[-x]=0$

$-2[-x]=-4$
$[-x]=2$
$2\le -x<3 \to -3<x\le -2$
$\to D_f=R-(-3,-2]$ ✓

۳- الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ $\xrightarrow[\text{با فرض جواب}]{\text{رادیکال}}$ $x(x^2-1)\ge 0$ $\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$ $\Rightarrow D_1=[-1,0]\cup[1,+\infty)$

$\xrightarrow[\text{رادیکال با فرض جواب و مخرج نباید صفر باشد}]{}$ $|x|+x>0 \xrightarrow[D_2=]{} x\in R^+$

$\xrightarrow[D_1\cap D_2]{} Df(x)=[1,+\infty)$ ✓

ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-x^2}}{|x|-1}$ $\xrightarrow{\text{زیر رادیکال با فرض جواب نامنفی}}$ $|x-2|-x^2\ge 0$

$-x^2-x+2\ge 0$ | $-x^2+x-2\ge 0$
$x^2+x-2\le 0$ | $x^2-x+2\le 0$
$(x+2)(x-1)\le 0$ | نمی‌تواند صفر داشته باشد

$D_1=[-2,1]$

$|x|-1$ $\xrightarrow[\text{صفر باشد}]{\text{مخرج نباید}}$ $|x|-1=0$
$|x|=1 \to D_2=R-\{\pm1\}$
$x=\pm1$

$\xrightarrow{D_1\cap D_2}[-2,1]-\{\pm1\}$ ✓

۴- $\dfrac{1}{||x-2|-1|-k}$ $\xrightarrow[\text{صفر باشد}]{\text{مخرج نباید}}$ $||x-2|-1|-k=0$

$||x-2|-1|=k \to |x-2|-1=k$; $-|x-2|+1=k$

$\to |x-2|-1=k$
$|x-2|=k+1 \to x-2=k+1 \to x=k+3$
$\to x-2=-k-1 \to x=-k+1$ (۲)

$k+3=-k+1$
$2k=-2 \to k=-1$ غیر قابل قبول

$\to -|x-2|+1=k$
$1-k=|x-2| \to x-2=1-k \to x=-k+3$ (۴)
$\to x-2=k-1 \to x=k+1$ (۵)

$1-k=|x-2|$
$k+1=3-k$
$2k=2 \to k=1$ قابل قبول

غیر قابل قبول: $k+1=1-k \to k=0$

غیر قابل قبول: $k+3=3-k \to 2k=0 \to k=0$

بنابراین $k=1$ قابل قبول است. ✓

-۵

$D = [-۲,۲]$

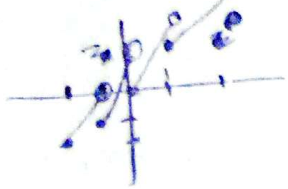
$\to -۲ \leq x < -۱ \to [x] = -۲ \to ۲x - (-۲) = ۲x + ۲$

$-۱ \leq x < ۰ \to [x] = -۱ \to ۲x - (-۱) = ۲x + ۱$

$۰ \leq x < ۱ \to [x] = ۰ \to ۲x$

$۱ \leq x < ۲ \to [x] = ۱ \to ۲x - (۱) = ۲x - ۱$

$x = ۲ \to [x] = ۲ \to ۲x - ۲$



۳

-۶

$f(x) = x$ همانی

$\frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x + a} + b = x$

$\frac{x^۲ + (-۴ + b)x + ۳ + ab}{x + a} = x \to \cancel{x^۲} + (-۴ + b)x + \underbrace{۳ + ab} = \cancel{x^۲} + ax$

$-۴ + b = a \qquad ab = -۳$

$-۴ + b = \frac{-۳}{b} \qquad a = \frac{-۳}{b}$

$-۴b + b^۲ + ۳ = ۰ \to b^۲ - ۴b + ۳ = ۰$

$(b - ۱)(b - ۳) = ۰$

$۱ \ , \ ۳$

$\to b = ۱ \to a = -۳ \to a - b = -۴$

$\to b = ۳ \to a = -۱ \to a - b = -۴$

۲

-۷

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲(x+۲) - (x+۲)}{x^۲ - ۱} & x \neq \pm ۱ \\ \frac{ax + ۲}{x + b} & x = \pm ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{(\cancel{x^۲ - ۱})(x + ۲)}{\cancel{x^۲ - ۱}} \quad x \neq \pm ۱$

$\to c = ۲$

۲

$g(x) = x + ۲$

$g(۱) = ۳$

$g(-۱) = ۱$

$\to f(۱) = \frac{a + ۲}{۱ + b} = ۳ \to a + ۲ = ۳ + ۳b$

$a - ۳b = ۱ \to -a + ۳b = -۱$

$f(-۱) = \frac{-a + ۲}{-۱ + b} = ۱ \to -۱ + b = -a + ۲$

$b + \cancel{a} = ۳$

$\cancel{-a} + ۳b = -۱$

$۴b = ۲ \to b = \frac{۱}{۲}$

$\to b + c = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$

-۸

$f(x) = \sqrt{۴x - ۳a} + k - ۱ \to ۴x - ۳a \geq ۰$

$۴x \geq ۳a \to x \geq \frac{۳a}{۴} \to \frac{۳a}{۴} = ۱ \to a = \frac{۴}{۳}$

$g(x) = \sqrt{b - ۴x} + ۳k \to b - ۴x \geq ۰$

$b \geq ۴x \to \frac{b}{۴} \geq x \to \frac{b}{۴} = ۱$

$b = ۴$

چون فقط $D = \{۱\}$ در هردو مشترک است پس داریم

$f(۱) = k - ۱$

$g(۱) = ۳k \to ۲k - ۲ - ۳k = k$

$-k - ۲ = k \to ۲k = -۲$

$k = -۱$

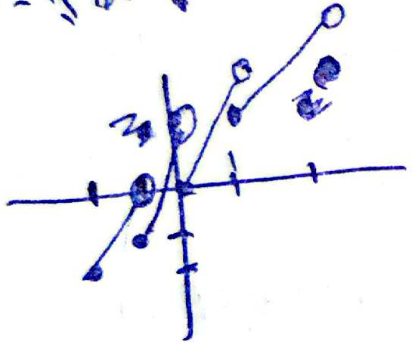
$۳a - \frac{b}{۲} - k = ۴ - ۲ - \frac{(-۱)}{۱} = ۳$

۲

۵-

$D = [-۲, ۲]$

$\rightarrow -۲ \leq x < -۱ \rightarrow [x] = -۲ \rightarrow ۲x - (-۲) = ۲x + ۲$



$-۱ \leq x < ۰ \longrightarrow [x] = -۱ \rightarrow ۲x - (-۱) = ۲x + ۱$

$۰ \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \rightarrow ۲x$

$۱ \leq x < ۲ \rightarrow [x] = ۱ \rightarrow ۲x - (۱) = ۲x - ۱$

$x = ۲ \rightarrow [x] = ۲ \rightarrow ۲x - ۲$

۶-

$f(x) = x$ ثابت

$$\frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x + a} + b = x$$

$$\frac{x^۲ (-۴ + b)x + ۳ + ab}{x + a} = x \rightarrow \cancel{x^۲} (-۴ + b)x + \underbrace{۳ + ab} = \cancel{x^۲} + ax$$

$-۴ + b = a$

$ab = -۳$

$a = \frac{-۳}{b}$

$-۴ + b = \frac{-۳}{b}$

$-۴b + b^۲ + ۳ = ۰ \rightarrow b^۲ - ۴b + ۳ = ۰$

$(b-۱)(b-۳) = ۰$

$۱ \quad , \quad ۳$

$\rightarrow b = ۱ \rightarrow a = -۳ \rightarrow a - b = -۴$

$\hookrightarrow b = ۳ \rightarrow a = -۱ \rightarrow a - b = -۴$

$(b-۱)(b-۲)=۰$

$۱ \ , \ ۲$

۷ -

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲(x+۲)-(x+۲)}{x^۲-۱} & x\neq \pm ۱ \\ \dfrac{ax+۲}{x+b} & x=\pm ۱ \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\cancel{(x^۲-۱)}(x+۲)}{\cancel{x^۲-۱}} \quad x\neq\pm ۱$

$\rightarrow c=۲$

$g(x)=x+۲$

$g(۱)=۳$

$g(-۱)=۱$

$\rightarrow f(۱)=\dfrac{a+۲}{۱+b}=۳ \rightarrow a+۲=۳+۳b$

$a-۳b=۱ \rightarrow -a+۳b=-۱$

$f(-۱)=\dfrac{-a+۲}{-۱+b}=۱ \rightarrow -۱+b=-a+۲$

$b+\cancel{a}=۳$

$\cancel{-a}+۳b=-۱$

$۴b=۲ \rightarrow b=\frac{۱}{۲}$

$\rightarrow b+c=\frac{۵}{۲}=۲/۵$

۸ -

$f(x)=\sqrt{۴x-۳a}+k-۱ \rightarrow ۴x-۳a\geq ۰$

$۴x\geq ۳a \rightarrow x\geq \frac{۳a}{۴} \rightarrow \frac{۳a}{۴}=۱ \rightarrow a=\frac{۴}{۳}$

همین نقطه $D=\{۱\}$ در هر دو مشترک است پس داریم

$g(x)=\sqrt{b-۴x}+۳k \rightarrow b-۴x\geq ۰$

$b\geq ۴x \rightarrow \frac{b}{۴}\geq x \rightarrow \frac{b}{۴}=۱$

$b=۴$

$f(۱)=k-۱$

$g(۱)=۳k$

$\rightarrow ۲k-۲-۳k=k$

$-k-۲=k \rightarrow ۲k=-۲$

$k=-۱$

$۳a-\frac{b}{۲}-k=۴-۲-\frac{(-۱)}{۱}=۳$

-۹

$f(x) = \sqrt{m-x} + n \rightarrow m - x \geq 0 \quad m \geq x \rightarrow m = 7$

$g(x) = \sqrt{2x+2} \rightarrow 2x+2 \geq 0, \quad 2x \geq -2 \rightarrow x \geq -1$

$\rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

۲

$f(x) = \sqrt{7-x} + n \quad \Big\{ \underbrace{\sqrt{7-3}}_{2} + n - \underbrace{\sqrt{2(3)+2}}_{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

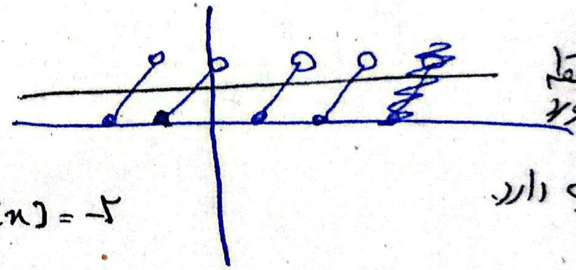
$\rightarrow 2 + n = 8\sqrt{2}$

$n = 8\sqrt{2} - 2$

$m + n = 5 + 8\sqrt{2}$

-۱۰

$\underbrace{(-1)^2}_{1} \underbrace{(x - [x])}_{\text{بین صفر و یک}} = \frac{1}{2}$



۴ نقطه برخورد

↓

۴ جواب دارد

۲

$y = x - [x] = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2$

$y = x + 2$

$\rightarrow -1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = x + 1$

$\rightarrow 0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = x$

$\rightarrow 1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = x - 1$

$\rightarrow x = 2 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = x - 2$