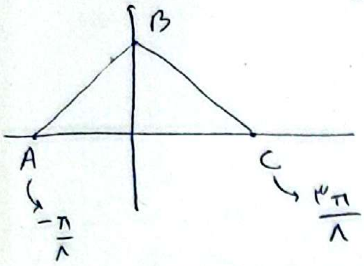
۲۰

۱)
$y = \tan(-2x + \frac{\pi}{4}) \to B: x=0 \to \tan\frac{\pi}{4} = 1 \to B(0,1)$

$\hookrightarrow A, C: \tan(-2x+\frac{\pi}{4}) = $ تن $\to \tan(-2x+\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{2}) \to -2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \to x = -\frac{\pi}{8}$ A

$\hookrightarrow \tan(-2x+\frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) \to -2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \to x = \frac{3\pi}{8}$ C



$A \to -\frac{\pi}{8}$, $C \to \frac{3\pi}{8}$

$\to \dfrac{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$C - A = T = \frac{\pi}{2}$

۲ ✓

---

۲)
$x^2 - (\sin\alpha)x - \frac{1}{4}\cos^2\alpha = 0 \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin\alpha - \frac{1}{4}(1-\sin^2\alpha) = 0$

$\hookrightarrow 16 - 24\sin\alpha - 9(1-\sin^2\alpha) = 9\sin^2\alpha - 24\sin\alpha + 7 = 0 \to$

$\sin\alpha = \dfrac{24 \pm \sqrt{324}}{18}$ ~~18~~ $\to \frac{42}{18}$ ✗

$\hookrightarrow \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ ✓ $\to \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \to$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \boxed{\frac{9}{8}}$

۲ ✓

---

۳)
$\log(\sin\alpha) - \log(-\cos\alpha) = \log 3 \to \log\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \log 3 \to \sin\alpha = -3\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to 9\cos^2 + \cos^2\alpha = 1 \to \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \to \cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10} \to \sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10} \to$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

۲ ✓

---

۴)
$\sin^4\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{5} \to \sin^4\theta + 1 - \sin^2\theta = \frac{4}{5} \to \sin^2\theta(\sin^2\theta - 1) = -\frac{1}{5} \to$

$\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\cos^4\theta + \sin^2\theta = \cos^4\theta + 1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta(\cos^2\theta - 1) + 1 = -\sin^2\theta\cos^2\theta + 1 = \boxed{\frac{4}{5}}$ (with $-\frac{1}{5}$ written above)

۲ ✓

---

۵)
$\dfrac{3\sin x + \sin x\cos x}{2 - 2\cos^2 x} < 0 \to \dfrac{\sin x(3+\cos x)}{2(1-\cos^2 x)} = \dfrac{3+\cos x}{2\sin x} < 0 \to 2\sin x < 0 \to \sin x < 0$

همواره + ($3+\cos x$); $(1-\cos^2 x) = \sin^2 x$; $\sin \neq 0$

$\sin x\tan x - \frac{1}{\cos x} > 0 \to \frac{1}{\cos x}(\sin^2 x - 1) > 0 \xrightarrow{\cos x \neq 0} -\cos x > 0 \to \cos x < 0$

$(\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x)$

ناحیه سوم

۲ ✓

(۶

$$\frac{۲}{\sin x}+\frac{۳}{\cos x}=۰ \longrightarrow \frac{۲\cos x+۳\sin x}{\sin x\cos x}=۰ \longrightarrow ۲\cos x+۳\sin x=۰ \longrightarrow \cos x=-\frac{۳}{۲}\sin x$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x=۱ \longrightarrow \sin^۲x+\frac{۹}{۴}\sin^۲x=۱ \longrightarrow \sin^۲x=\frac{۴}{۱۳} \longrightarrow \sin x=\pm\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

$$\longrightarrow \cos x=\pm\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

مختلف العلامت هستند ↓ $\sin x\cos x<۰$

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{-\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}\times\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}}=\boxed{\frac{-۱۳}{۶}}$$

(۲) ✓

(۷

$$۱+\sin ۵۰=۱+۲\sin ۲۵\cos ۲۵=(\sin ۲۵+\cos ۲۵)^۲ \longrightarrow \sqrt{۱+\sin ۵۰}=\sin ۲۵+\cos ۲۵$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۴}\right) \longrightarrow \sin ۲۵+\cos ۲۵=\sqrt{۲}\sin ۷۰=\sqrt{۲}\cos ۲۰$$

$$\sin ۵۰+\sin ۱۰=\sin(۲۰+۳۰)+\sin(۳۰-۲۰)=\sin ۲۰\cos ۳۰+\sin ۳۰\cos ۲۰+\sin ۳۰\cos ۲۰-\cos ۳۰\sin ۲۰$$

$$۲\sin ۳۰\cos ۲۰=\cos ۲۰ \longrightarrow \frac{\sqrt{۱+\sin ۵۰}}{\sin ۵۰+\sin ۱۰}=\frac{\sqrt{۲}\cos ۲۰}{\cos ۲۰}=\sqrt{۲}$$

(۲) ✓

(۸

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲} \longrightarrow \cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \longrightarrow ۱-۲\sin^۲ = \cos ۱۰$$

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \longrightarrow \cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱ \longrightarrow ۲\cos^۲ ۱۰-۱=\cos ۲۰$$

$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \longrightarrow \frac{۱-\tan^۲ ۲۰}{۱+\tan^۲ ۲۰}=\cos ۴۰ \longrightarrow$$

$$(۱-۲\sin^۲ ۵)(۲\cos ۱۰-۱)\left(\frac{۱-\tan^۲ ۲۰}{۱+\tan^۲ ۲۰}\right)=\frac{\sin ۱۰}{\sin ۱۰}\times\cos ۱۰\times\cos ۲۰\times\cos ۴۰=\frac{۱}{۸}\frac{\sin ۸۰}{\sin ۱۰} \longrightarrow$$

$$\frac{۱}{۸}\times\frac{\cos ۱۰}{\sin ۱۰}=\boxed{\frac{۱}{۸}\cot ۱۰}$$

(۲) ✓

(۹

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱ \longrightarrow ۵\cos ۲\alpha-۱۲\cos\alpha=۱۰\cos^۲\alpha-۱۲\cos\alpha-۵=?$$

$$\sin\alpha+۳\cos\alpha=۲ \longrightarrow \sin\alpha=۲-۳\cos\alpha \longrightarrow \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$(۲-۳\cos\alpha)^۲+\cos^۲\alpha=۹\cos^۲\alpha+۴-۱۲\cos\alpha+\cos^۲\alpha=۱۰\cos^۲\alpha-۱۲\cos\alpha+۴=۱ \longrightarrow$$

$$۱۰\cos^۲\alpha-۱۲\cos\alpha=-۳ \longrightarrow ۱۰\cos^۲\alpha-۱۲\cos\alpha-۵=-۳-۵=\boxed{-۸}$$

(۲) ✓

(۱۰

$$\cos^۲\frac{A}{۲}=\frac{۱+\cos A}{۲} \qquad \cos A=\cos(\pi-(B+C))=-\cos(B+C) \longrightarrow$$

$$۱-\cos(B+C)=۲\sin B\sin C \longrightarrow ۱-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=۲\sin B\sin C \longrightarrow$$

$$۱-\cos B\cos C+\sin B\sin C=۲\sin B\sin C \longrightarrow$$

$$۱-(\cos B\cos C+\sin B\sin C)=۰ \longrightarrow ۱-\cos(B-C)=۰ \longrightarrow \cos(B-C)=۱ \longrightarrow B-C=۰ \longrightarrow B=C=۷۲$$

$$\hat A=۱۸۰-(\hat B+\hat C)=۱۸۰-۱۴۴ \longrightarrow \boxed{A=۳۶^\circ}$$

(۲) ✓