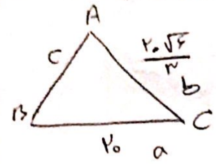
تکلیف ۱۳

تالین عمار - فاطمه شعبانی

۱) $A\hat{B}C \to BC=۲۰ , \hat B+\hat C=۱۲۰° , AC=\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳} \to \hat C=? \quad \hat B=?$



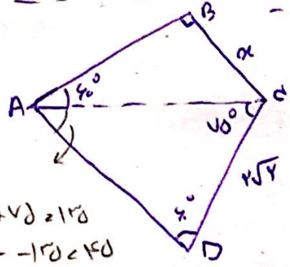
طبق قضیه سینوس ها

$$\to \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \to \frac{۲۰}{\underbrace{\sin ۶۰°}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}}=\frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin\hat B} \to \sin\hat B=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\cancel{۲۰}\sqrt{۶}}{۳}}{\cancel{۲۰}}$$

$\hat B+\hat C=۱۲۰ \to \hat A=۱۸۰-۱۲۰=۶۰°$

$$\to \sin\hat B=\frac{\sqrt{۱۸}}{۶}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \boxed{\hat B=۴۵°} \to C=۱۲۰-۴۵=\boxed{۷۵°=\hat C}$$

۲)



۶۰+۷۵=۱۳۵

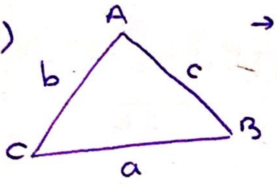
۱۸۰-۱۳۵=۴۵

$\to x=?$ طبق قضیه سینوس ها

$$\to \frac{BC}{\sin ۶۰°}=\frac{{}^{*}AC}{\sin ۹۰°} \Rightarrow BC=\frac{\cancel{۲}\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}}{۱}=\boxed{۳}$$

$$* \quad \frac{AC}{\sin ۶۰}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin ۴۵} \to AC=\frac{\cancel{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

۳)



$\to (b^۲-۲)\frac{\sin\hat C}{\sin\hat B}=c \to b=?$

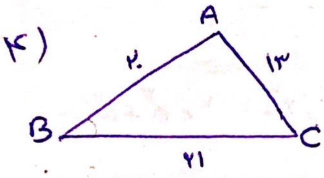
$$\frac{a}{\sin\hat A}=\frac{b}{\sin\hat B}=\frac{c}{\sin\hat C} \to \frac{\sin\hat C}{\sin\hat B}=\frac{c}{b} \to (b-\sqrt{۲})(b+\sqrt{۲})\frac{\cancel{c}}{b}=\cancel{c} \to$$

$$\frac{b^۲-۲}{b}=۱ \to b^۲-b-۲=۰ \to (b-۲)(b+۱)=۰$$

$b=-۱$ غ‌ق‌ق

$\boxed{b=۲}$ ✓

۴)



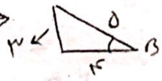
$\to \sin\hat B=?$

$\to$ طبق قضیه کسینوس ها $\to AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲(AB)(BC)\cos\hat B \to$

$$۱۳^۲=\underbrace{۲۰^۲+۲۱^۲}_{۴۰۰+۴۴۱=۸۴۱}-\underbrace{\overbrace{۲\times۲۰\times۲۱}^{۴۲}\times\cos\hat B}_{۸۴۰\cos\hat B} \to ۱۶۹=۸۴۱-۸۴۰\cos\hat B$$

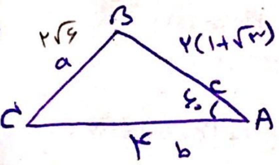
$$\to ۸۴۰\cos\hat B=\underbrace{۸۴۱-۱۶۹}_{۶۷۲}$$

$\cos\hat B=\frac{۶۷۲}{۸۴۰}=\frac{۴}{۵} \longrightarrow$



$\to \boxed{\sin\hat B=\frac{۳}{۵}}$

۵)



الف) $a=? \ (BC) \to$

طبق قضیه کسینوس ها

$$\to a^۲=۱۶+۸(۲+\sqrt{۳})-۸(۱+\sqrt{۳}) \to$$

$$a^۲=۱۶+۸(\underbrace{۲+\cancel{\sqrt{۳}}-۱-\cancel{\sqrt{۳}}}_{۱})=۲۴ \to \boxed{a=۲\sqrt{۶}}$$

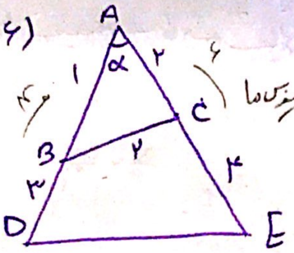
ب) $\hat B=? \quad \hat C=?$

$\to$ طبق قضیه سینوس ها

$$\to \frac{۲\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{\sin\hat B} \to \sin\hat B=\frac{\cancel{۴}\times\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}}}{\cancel{۲}\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\to \sin\hat B=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \boxed{\hat B=۴۵°} \to ۱۸۰-۶۰-۴۵=\boxed{۷۵°=C}$$

۶) $\rightarrow DE = ?$

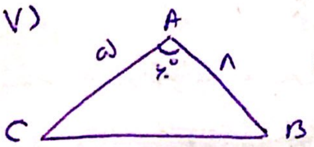


طبق قضیه کسینوس ها

$\rightarrow$ در مثلث ABC $\rightarrow ۴ = ۴+۱-۴\cos\alpha \rightarrow ۴\cos\alpha = ۱ \rightarrow \underline{\cos\alpha = \frac{۱}{۴}}$

$\rightarrow$ در مثلث ADE $\rightarrow DE^۲ = ۱۶+۳۶-\underbrace{۴۸\times\frac{۱}{۴}}_{۱۲} = ۴۰ \rightarrow \boxed{DE = ۲\sqrt{۱۰}}$

۷)



الف) $BC = ?$

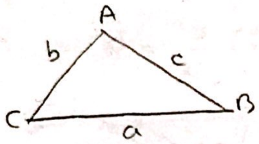
طبق قضیه کسینوس ها $\rightarrow BC^۲ = \overbrace{۲۵+۶۴}^{۸۹} - \underbrace{۸۰\times\frac{۱}{۲}}_{۴۰} \Rightarrow \boxed{BC = ۷}$

$BC^۲ = ۴۹$

ب) $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ? \rightarrow$

یادآوری : $S_\triangle = \frac{۱}{۲}\underset{AC}{a}\,\underset{AB}{b}\,\sin\underset{۶۰°}{\theta} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times۵\times۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{۱۰\sqrt{۳}}$

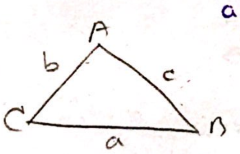
۸) $\overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \dfrac{(b+c)^۲-a^۲}{bc(\cos\hat{A}+1)} = ?$



$* \rightarrow a^۲ = b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A} \rightarrow \dfrac{(b+c)^۲-a^۲}{bc(\cos\hat{A}+1)} = \dfrac{\cancel{b^۲}+\cancel{c^۲}+۲bc-\cancel{b^۲}-\cancel{c^۲}+۲bc\cos\hat{A}}{bc(\cos\hat{A}+1)}$

$\rightarrow = \dfrac{۲\cancel{bc}(1+\cancel{\cos\hat{A}})}{\cancel{bc}(1+\cancel{\cos\hat{A}})} = \boxed{۲}$

۹) $\overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \dfrac{a^۳+b^۳-c^۳}{a+b-c} = a^۲ \rightarrow \cos\hat{A} = ?$



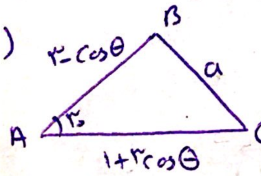
$\dfrac{a^۳+(b-c)(b^۲+bc+c^۲)}{a+b-c} = a^۲ \rightarrow \cancel{a^۳}+(b\cancel{-c})(b^۲+c^۲+bc) = \cancel{a^۳}+a^۲(b\cancel{-c})$

$\rightarrow b^۲+c^۲+bc = a^۲$

طبق قضیه کسینوس ها $\rightarrow b^۲+c^۲+۲bc\cos\hat{A} = a^۲$

$\longrightarrow \cancel{bc} = ۲\cancel{bc}\cos\hat{A} \rightarrow \boxed{\cos\hat{A} = \frac{1}{۲}}$

۱۰)



$\rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۲ \rightarrow a^۲ = ?$

طبق قضیه کسینوس ها $a^۲ = (۳-\cos\theta)^۲+(1+۳\cos\theta)^۲-۲\underbrace{(۳-\cos\theta)(1+۳\cos\theta)}_{۸}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$* S = \frac{1}{۲}\times AB\times AC\times\sin۳۰ = \frac{1}{۲}\times(۳-\cos\theta)(1+۳\cos\theta)\times\frac{1}{۲} = ۲ \rightarrow \underline{(۳-\cos\theta)(1+۳\cos\theta) = ۸}$

$\rightarrow ۹\cos\theta+۳-\cos\theta-۳\cos^۲\theta = ۸ \rightarrow ۳\cos^۲\theta-۸\cos\theta+۵ = ۰$

$\cos^۲\theta-۸\cos\theta+۱۵ = ۰ \longrightarrow \cos\theta = \frac{۵}{۳}$ ✗ غ ق ق

$\searrow \cos\theta = \frac{۳}{۳} = 1$ ✓

$\rightarrow a^۲ = (۳-1)^۲+(1+۳)^۲-\cancel{۲}(۸)\times\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = ۴+۱۶-۸\sqrt{۳} = \boxed{۲۰-۸\sqrt{۳}}$