تکالیف عطار - فاطمه شعبانی

۱) $f(x)=x+[x]$

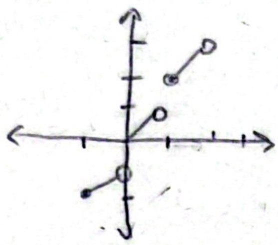
الف) $f^{-1}=f \to$ باشد

$[1,2)\to x+1$

$[0,1)\to x$

$[-1,0)\to x-1$

$[-2,-1)\to x-2$



→ صعودی اکید ← بازه‌ی $[0,1)$ → $f(x)=f^{-1}(x)$

به سبب ناپیوستگی، نقطه‌ای را قطع نمی‌کند!

ب) $f\circ f^{-1}(x)=2x-\frac{3}{2} \to f\circ f^{-1}(x)=x$

می‌دانیم حاصل تابع $f\circ f^{-1}(x)$ همان x است ولی گفتیم که حاصل باید جزوی از دامنه‌ی f^{-1} باشد ← $f^{-1}=\frac{[x]}{2}$ ← دامنه‌ی شرط f بود

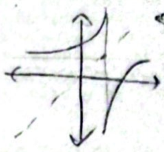
$x=2x-\frac{3}{2}\to x=\frac{3}{2}$

ولی این مقدار قابل قبول نیست چون در دامنه‌ی f^{-1} قرار ندارد ←

جواب ندارد!

۲) $y=\frac{ax+3}{3x+b}$ → محل برخورد ۲ مجانب = روی نیمساز → $f\circ f(5-\sqrt{4})=?$

وقتی محل برخورد لزوماً روی خط $x=y$ است، شد ←



تابع نسبت به $x=y$ متقارن است یعنی تابع با معکوسش

خودش برابر است! ← یعنی $a+d=0$

$f=f^{-1}\to f\circ f(5-\sqrt{4})=f\circ f^{-1}(5-\sqrt{4})$

$(f\circ f^{-1}(x)=x)\to f\circ f^{-1}(5-\sqrt{4})=\boxed{5-\sqrt{4}}$

۳) $\frac{mx+3}{x+m+3}\Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ if $x=\alpha,\beta\to\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=?$

$f(x)\to\frac{ax+b}{cx+d}\xrightarrow{f^{-1}}\frac{-dx+b}{cx-a}\to f^{-1}(x)=\frac{-(m+3)x+3}{x-m}\to\frac{mx+3}{x+(m+3)}=\frac{-(m+3)x+3}{x-m}$

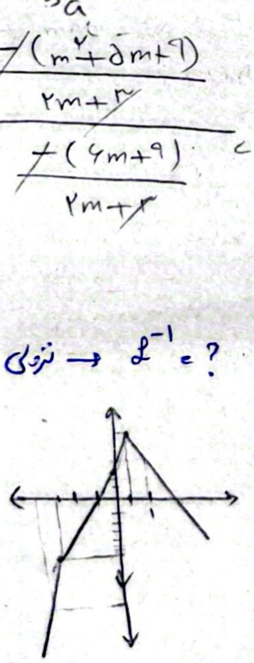
$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} mx^2+(3-m)x-3m=\underbrace{(2m+3)}_{a}x^2+\underbrace{(m^2+5m+9)}_{b}x\underbrace{-6m-9}_{c}=0$

$\to\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{\cancel{-}(m^2+5m+9)}{2m+3}}{\frac{\cancel{-}(6m+9)}{2m+3}}=\boxed{\frac{m^2+5m+9}{6m+9}}$

۴) $f(x)=\sqrt{(2x+5)^2}-\sqrt{(5x-2)^2}\to$ نزولی $\to f^{-1}=?$

$f(x)=|2x+5|-|5x-2|\Rightarrow$

از طریق نقاط بحرانی شکل را رسم می‌کنیم!



→ بازه‌ی نزولی → $2x+5-5x+2=-3x+7$

$[\frac{2}{5},+\infty)\to$ نزولی

$\to y=-3x+7\to f^{-1}$

$x=-3y+7\to 3y=-x+7\to\boxed{f^{-1}=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}$

۵) $g(x)=2f(3x)-1 \to g^{-1}(x)=af^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)+d \to \frac{ac+d}{2b}=?$ (۵

$\to g(x)=t=2f(3x)-1$

I) $g(x)=t \to g^{-1}(t)=x$

II) $2f(3x)-1=t \to f(3x)=\frac{t+1}{2} \to f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)=3x \to x=\frac{1}{3}f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)$

$\cap \quad g^{-1}(t)=\frac{1}{3}f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)$, $g^{-1}(x)=af^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)+d$

$a=\frac{1}{3}$, $b=1$, $c=2$, $d=0$

$\to \frac{ac+d}{2b}=\frac{\frac{1}{3}\times 2+0}{2\times 1}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$

۶) $f(x)=x+2\sqrt{x} \to f^{-1}=?$, $D_{f^{-1}}=?$ (۶

$f(x)=x+2\sqrt{x} \to R_f=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$

$D_f=\underline{x\geq 0}$

$\to y=x+2\sqrt{x} \xrightarrow{f^{-1}} x=y+2\sqrt{y} \to x=(\sqrt{y}+1)^2-1 \to x+1=(\sqrt{y}+1)^2 \to \pm\sqrt{x+1}=\sqrt{y}+1$

$(+) \leftarrow f^{-1}\geq 0$

$\to \sqrt{x+1}=\sqrt{y}+1 \to \sqrt{x+1}-1=\sqrt{y} \to y=x+1-2\sqrt{x+1}+1 \to y=x-2\sqrt{x+1}+2$

$\to f^{-1}=x-2\sqrt{x+1}+2$, $D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$

۷) $y=x-1+2^x \to f^{-1}=f \to ?$

$y=\underbrace{2^x}+\underbrace{x-1} \to x=y \to x=x-1+2^x \to 0=2^x-1 \to 2^x=1 \to \underline{x=0}$

$\underline{x=0}$

اکیداً صعودی

جمع دوتاشون اکیداً صعودی = اکیداً صعودی

وارون خود را در $x=y$ قطع می‌کند

یک نقطه برخورد!

۸) $f(x)=x^3+3x \to y=\sqrt{f^{-1}(x)-x} \to D_{f^{-1}}=?$

اکیداً صعودی!

$f(x)=x^3+3x \to f^{-1}(x)\geq x \to f(x)^{-1}\geq f\circ f(x) \to f(x)^{-1}\geq f^{-1}(f(x))$

$\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} x\geq f(x) \to x\geq x^3+3x \to x^3+3x\leq 0 \to x(x^2+3)\leq 0$

همواره >0

	0	
$-$		$+$

$\to \boxed{[0,+\infty)}$

(۹

9) $f(x) = -x + \sqrt{x+4}$ ، $x \geq -3 \to$ وارون $\to x+4 \to g(x) \to y = x-3 \to ?$

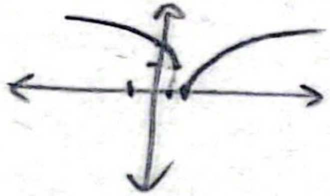
$x \leftrightarrow y$

$\to -x + \sqrt{x+4} \to y = -(x - \sqrt{x+4} + \frac{17}{4} - \frac{17}{4}) \to y = -(\sqrt{x+4} - \frac{1}{2})^2 + \frac{17}{4}$ مربع کامل می‌سازیم

$\to \pm\sqrt{\frac{17}{4} - y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x+4} \longrightarrow (\sqrt{\frac{17}{4} - y} + \frac{1}{2})^2 - 4 = y = g(x) \to (\sqrt{\frac{17}{4} - x} + \frac{1}{2})^2 - 4 = x - 3$

$x \geq -3$

$\sqrt{\frac{1}{4} - x} + \frac{1}{2} = \sqrt{x-1} \to$



$\to$ نقطه برخورد ندارند $\to \boxed{0}$

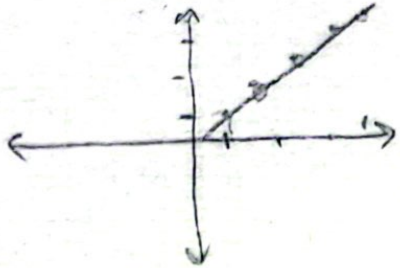
(۱۰

10)

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \to \sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \to y = (2 - \sqrt{x})^2 \to y = 4 - 4\sqrt{x} + x$

$\to 2 - \sqrt{x} \geq 0 \to 2 \geq \sqrt{x} \to x \leq 4 \cap 0 \leq x \leq 4$

$\to x \geq 0$



منطبق بر $x=y$