پرنیا سپهرنیا

۱ـ الف) $f(x) = x + [x] \to f^{-1}(x) \Rightarrow y = x + [x] \to x = y + [y] \to$

$\to y = x - [y] \xrightarrow[\text{تبدیل}]{\text{از طرفین براکت}} [y] = [x - [y]] \to [y] = [x] - [y] \to$

$2[y] = [x] \to [y] = \frac{[x]}{2} \xrightarrow{y = x - [y]} y = x - \frac{[x]}{2}$

$f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2} \to f^{-1}(x) = f(x) = x - \frac{[x]}{2} = x + [x] \to$

$\to x + \frac{1}{2}[x] = 0 \to \frac{3}{2}[x] = 0 \to [x] = 0 \to 0 \le x < 1$

بی‌شمار

ب) $f \circ f^{-1}(x) = 2x - \frac{3}{2} \xrightarrow{f \circ f^{-1}(x) = x} x = 2x - \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{2}$

۲ـ $y = \frac{ax+3}{4x+b}$ → مجانب افقی $= \frac{a}{4} \longrightarrow \frac{a}{4} = \frac{-b}{4} \Rightarrow a = -b$

→ مجانب قائم $= -\frac{b}{4}$

$\to f(x) = f^{-1}(x) \xrightarrow{f \circ f^{-1}(x) = x} f \circ f(5 - \sqrt{6}) = f \circ f^{-1}(5 - \sqrt{9}) = 5 - \sqrt{6}$

۳ـ $f(x) = \frac{mx+3}{x+m+3} \xrightarrow{\text{خود وارون است}} f^{-1}(x) = \frac{-(m+3)x+3}{x-m}$

$\frac{mx+3}{x+m+3} = \frac{-(m+3)x+3}{x-m} \to mx^2 - m^2x + \cancel{3x} - 3m = -(m+3)x^2 - (m+3)^2x + \cancel{3x} + 3(m+3) \to$

$\to (2m+3)x^2 + (6m+9)x - (6m+9) = 0 \to \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} \to$

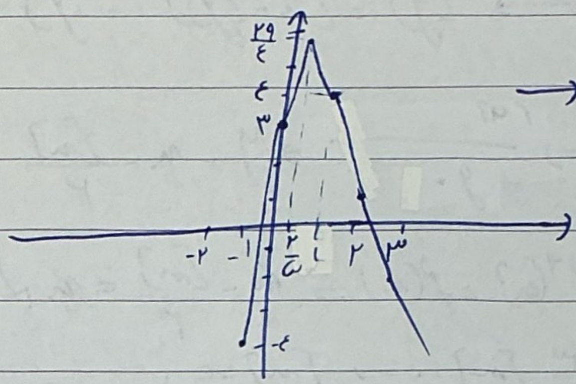
$\to \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-(6m+9)}{-(6m+9)} = 1$

s.a.m

۴-

$$f(x)=\sqrt{(2x+5)^2}-\sqrt{(5x-2)^2}=|2x+5|-|5x-2|$$

$x<-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}<x<\frac{2}{5}$	$x>\frac{2}{5}$
$-2x-5-(2-5x)=3x-7$	$2x+5-(2-5x)=7x+3$	$2x+5-5x+2=-3x+7$



$\longrightarrow$ تابع در بازه‌ی $\frac{2}{5}$ به بعد نزولی است که در این بازه ضابطه به صورت $-3x+7$ است

$$f(x)=-3x+7 \longrightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow y=-3x+7 \longrightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

۵-

$$g(x)=2f(3x)-1 \qquad g^{-1}(x)=af^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)+d \qquad \frac{ac+d}{2b}$$

$$g(x)=2f(3x)-1=t \longrightarrow g(x)=t \longrightarrow g^{-1}(t)=x$$

$$2f(3x)=t+1 \longrightarrow f(3x)=\frac{t+1}{2} \longrightarrow f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)=3x \longrightarrow x=\frac{f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)}{3}$$

$$g^{-1}(t)=x=\frac{f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)}{3}$$

$$\longrightarrow g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{3}$$

$$\longrightarrow g^{-1}(x)=af^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)+d$$

$$\longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=1,\ c=2,\ d=0$$

$$\frac{ac+d}{2b}=\frac{\frac{2}{3}+0}{2}=\frac{1}{3}$$

s.a.m

۶

$f(x)=x+2\sqrt{x} \rightarrow y=(\sqrt{x}+1)^2-1 \rightarrow y+1=(\sqrt{x}+1)^2 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt{x}+1 \rightarrow \sqrt{y+1}-1=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{۲ طرف به توان ۲}} y+1+1-2\sqrt{y+1}=x \rightarrow$

$\rightarrow x=y-2\sqrt{y+1}+2 \rightarrow y=x-2\sqrt{x+1}+2 \rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}+1)^2 \rightarrow$

$D_{f^{-1}}=R_f=[0,+\infty)$

۷

$y=x-1+2^x \xrightarrow[\text{با } y=x \text{ برابر قرار دهیم}]{\text{چون تابع صعودی است آن را}} \cancel{x}-1+2^x=\cancel{x} \rightarrow 2^x=1 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow$ در یک نقطه

۸

$f(x)=x^3+4x \qquad y=\sqrt{f^{-1}(x)-x}$

$f^{-1}(x)=u \rightarrow f(u)=x \rightarrow f^{-1}(x)-x\geq 0 \rightarrow u-(u^3+4u)=-u^3-3u\geq 0$

$\rightarrow -(u^3+3u)\geq 0 \rightarrow u^3+3u\leq 0 \rightarrow u(\underbrace{u^2+3}_{\text{همواره +}})\leq 0 \rightarrow u\leq 0$

$x\leq f(0)=0 \rightarrow D_f=(-\infty,0] \rightarrow$ تنها $x=0$ جزو اعداد صحیح نامنفی

این بازه است پس جواب ۱

عدد صحیح نامنفی است

۹-

$f(x) = -x + \sqrt{x+4} \xrightarrow[\text{نقش وارون}]{y=x \text{ قرینه نسبت به}} y = -\left(\sqrt{x+4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$

$\frac{17}{4} - y = \left(\sqrt{x+4} - \frac{1}{2}\right)^2 \to \sqrt{\frac{17}{4} - y} = \sqrt{x+4} - \frac{1}{2} \to \sqrt{\frac{17}{4} - y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x+4} \to$

$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \frac{17}{4} - y + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{4} - y} = x + 4 \to x = -y + \sqrt{\frac{17}{4} - y} + \frac{1}{2}$

$f^{-1}(x) = -x + \sqrt{\frac{17}{4} - x} + \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} g(x) = -(x+4) + \sqrt{\frac{17}{4} - (x+4)} + \frac{1}{2} \to$

$\to g(x) = -x - 4 + \sqrt{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = x - 3 \to$

$\to \overset{2x + \frac{1}{2}}{\cancel{2x + 1 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4} - x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4x^2 + 2x + \cancel{\frac{1}{4}} = \cancel{\frac{1}{4}} - x \to$

$\to 4x^2 + 3x = 0 \to x(4x + 3) = 0 \to x = 0$

$\to x = -\frac{3}{4}$

هر دو در شرط ۳ جمله صدق می‌کنند پس ۲ جواب دارد

۲ حالت برخورد می‌کنند.

۱۰-

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \to$ در صورت وارون کردن با خودش برابر است $\to$

$\to f(x) = f^{-1}(x) \to f \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$

$D_f \to x \geq 0 , y \geq 0$