نام و نام خانوادگی ...صبا امینی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...11... کلاس ...دوازدهم ریاضی A...

1

الف) $y = x + [x] \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین براکت}} [y] = 2[x] \to [x] = \frac{[y]}{2}$ ☆

$\xrightarrow{☆\ \text{طبق}} y = x + \frac{[y]}{2} \xrightarrow[\text{جای x و y را عوض میکنیم}]{\text{وارون}} x = y + \frac{[x]}{2} \to y = x - \frac{[x]}{2} \to f^{-1}(x) = x - \frac{[x]}{2}$

$\frac{x-[x]}{2} = x + [x]$ در یک دستگاه حل می‌کنیم $\to 2x - [x] = 2x + 2[x] \to 0 = 3[x] \to 0 = [x] \to 0 \le x < 1 \to$ در بی‌شمار نقطه

ب) $f\circ f^{-1}(x) = 2x - \frac{3}{2}$, $f\circ f^{-1}(x) = x$

$x - \frac{[x]}{2} + \left[x - \frac{[x]}{2}\right] = 2x - \frac{3}{2}$ $\to 2x - \frac{3}{2} = x$, $x = \frac{3}{2}$; $x \in D_{f^{-1}}$, $x \in R_f$

$0 \le x < 1 \to y = x \to 0 \le y < 1$; $1 \le x < 2 \to y = x+1 \to 2 \le y < 3$; $x \notin R_f$ غ ق ق

2

$y = \frac{ax+3}{4x+b} \xrightarrow{\text{عمودی}} 4x + b = 0 \to x = \frac{-b}{4}$

$\xrightarrow{\text{افقی}} \frac{a}{4} = y$

$\xrightarrow{x=y} \frac{-b}{4} = \frac{a}{4} \to a = -b$

$a + b = 0$

$f(x) = f^{-1}(x)$

$\to f\circ f(x) = f\circ f^{-1}(x) = x \to f\circ f(5-\sqrt{6}) = 15-\sqrt{6}$

3

$f^{-1}(x) = \frac{-(m+3)x+3}{x-m} = \frac{mx+3}{x+(m+3)} \to (-m+3)x^2+3x-(m+3)^2x+3(m+3)$

$\to mx^2+3x-m^2x-3m \Rightarrow -mx^2-3x^2+3x-m^2x-6mx-9x+3m+9$

$\to mx^2+3x-9m^2-3m \to -2mx^2-3x^2-9x-6mx+3m+9+3m$

$\to -(2m+3)x^2-(9+6m)x+6m+9 \to \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{S}{P} \to \frac{\frac{9+6m}{-(2m+3)}}{\frac{9+6m}{-(2m+3)}} = 1$

4

$f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(5x-2)^2} = |2x+5| - |5x-2|$

ریشه: $\frac{-5}{2}$ ، ریشه: $\frac{2}{5}$

$\to x \ge \frac{2}{5} \to 2x+5-5x+2 \to -3x+7$ نزولی

$\to \frac{-5}{2} \le x \le \frac{2}{5} \to 7x+3$ صعودی

$\to x \le \frac{-5}{2} \to 3x-7$ صعودی

$x \ge \frac{2}{5} \to -3x \le \frac{-6}{5} \to -3x+7 \le \frac{29}{5}$

$y = -3x+7 \to 7-y = 3x \to x = \frac{7-y}{3} \to y = \frac{7-x}{3}$

$\to f^{-1}(x) = \frac{7-x}{3}$ $x \le \frac{29}{5}$ $[\frac{2}{5}, +\infty) \leftarrow D_f = R_{f^{-1}}$ / $R_f = D_{f^{-1}} \to (-\infty, \frac{29}{5}]$

5

$g(x) = k \to 2f(3x)-1 = k \to k \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) = 3x \to x = \frac{f^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right)}{3} \to g^{-1}(x)$

$g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ $\to a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $C = 2$, $d = 0$

$\frac{aC+d}{2b} = \frac{\frac{1}{3}\times 2+0}{2} \to \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

۶

$f(x) = x + 2\sqrt{x} \longrightarrow R_f = [0, +\infty)$

$\longrightarrow y = (x + 2\sqrt{x} + 1) - 1 \longrightarrow y + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \longrightarrow \pm\sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$ (قق ، غ ق ق)

$y + 1 + 1 - 2\sqrt{y+1} = x \longrightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow y = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$ $\left(D_{f^{-1}} = R_f \to [0, +\infty)\right)$

$\longrightarrow f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 2, \quad x \in [0, +\infty)$

۷

$y = \underbrace{x - 1}_{\text{اص}} + \underbrace{2^x}_{\text{اص}}$ ← اص ⟶ دو اص تابع اکیداً صعودی است ⟶ وارونش خود را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند

$x = x - 1 + 2^x$

$1 = 2^x \xrightarrow[y=0]{x=0} (0, 0) \longrightarrow$ یک نقطه

۸

$f(x) = \underbrace{x^3}_{\text{اص}} + \underbrace{4x}_{\text{اص}} \longrightarrow$ تابع اکیداً صعودی است

$y = \sqrt{f^{-1}(x) - x} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال } \geq 0} f^{-1}(x) \geq x \longrightarrow x \geq f(x)$ (از دو طرف f می‌گیریم ← تابع اص است)

$\longrightarrow x \geq x^3 + 4x \longrightarrow x^3 + 3x \leq 0$

$x(\underbrace{x^2 + 3}_{\text{همواره } +}) \leq 0 \longrightarrow x \leq 0 \longrightarrow$ فقط ۰ نامنفی است

۹

$x = -y + \sqrt{y + 4} \longrightarrow x + y = \sqrt{y+4} \longrightarrow (x+y)^2 = y + 4 \longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - y - 4 = 0$

$\longrightarrow y^2 + (2x - 1)y + (x^2 - 4) = 0 \longrightarrow y = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \to \dfrac{-(2x-1) \pm \sqrt{(2x-1)^2 - 4(x^2-4)}}{2}$

$\longrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 16 = 17 - 4x \qquad y = \dfrac{-2x + 1 \pm \sqrt{17 - 4x}}{2} \longrightarrow$ تابع اصلی نزولی و معکوس آن صعودی است

$y = \dfrac{-2x + 1 + \sqrt{17 - 4x}}{2} \longrightarrow g(x) = \dfrac{-2(x+4) + 1 + \sqrt{17 - 4(x+4)}}{2} \to \dfrac{-2x - 7 + \sqrt{1 - 4x}}{2}$

$\longrightarrow x = 0$ فقط [illegible] در دامنه دارد

۱۰

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \xrightarrow[\text{عوض کردن جای } x \text{ و } y]{\text{وارون کردن}} \sqrt{y} + \sqrt{x} = 2 \longrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$

$D_{f^{-1}} = R_f = [0, 4]$

$D_f = [0, 4]$

$f \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) \Rightarrow x, \quad x \geq 0$

یا $\longrightarrow f^{-1} \circ f(x)$