به نام خدا　　نیایش زندی　　تکلیف شماره ۱۱　　دوازدهم دفتر ۸

---

①

$f(x)=x+[x]$　　$f^{-1}(x) \longrightarrow x=y+[y]$　　$y=x-[\cancel{y}]$

از دو طرف براکت می‌گیریم　$[y]=[x-[y]]$　　$[y]=[x]-[y]$　　$2[y]=[x]$

$[y]=\frac{[x]}{2}$

$x=y+[y] \longrightarrow y=x-[y]$　　$y=x-\frac{[x]}{2}$

$f^{-1}(x)=x-\frac{[x]}{2}$　　$f^{-1}(x)=f(x)$　　$\cancel{x}-\frac{[x]}{2}=\cancel{x}+[x]$

$-\frac{[x]}{2}=[x]$　　$[x]+\frac{1}{2}[x]=0$　　$\frac{3}{2}[x]=0$　　$[x]=0$

$0\leq x<1$　در این بازه در بی‌شمار نقطه هم را قطع می‌کنند $\longleftarrow$ الف)

$f\circ f^{-1}(x)=x$　　$2x-\frac{3}{2}=x$　　$x=\frac{3}{2}$ $\longleftarrow$ ب)

---

②

$y=\frac{ax+3}{4x+b}$　　$\frac{a}{4}=\frac{-b}{4}$　　$a=-b \Longrightarrow$ معکوس این تابع با خودش برابر است

$f\circ f(x)=f^{-1}\circ f(x)$

$f\circ f(a-\sqrt{6})=a-\sqrt{6}$　　$f(x)=f^{-1}(x)$　　$=x$

---

③

$f(x)=\frac{mx+3}{x+m+3}$　　$f^{-1}(x)=\frac{-(m+3)x+3}{x-m}$　　$f(x)=f^{-1}(x)$

$\frac{mx+3}{x+m+3}=\frac{-(m+3)x+3}{x-m}$　　$mx^2-m^2x+\cancel{3x}-3m=-(m+3)x^2-(m+3)^2x+3(m+3)+\cancel{3x}$

ادامه $\longrightarrow$

3

$$mx^2 - m^2x + \cancel{3x} - 3m = -(m+3)x^2 - (m+3)^2x + 3(m+3) + \cancel{3x}$$

$$(m+m+3)x^2 + \left(-m^2+(m+3)^2\right)x - 3m - 3m - 9 = 0$$

$$(2m+3)x^2 + (-m^2+m^2+6m+9)x - 6m - 9 = 0$$

$$(2m+3)x^2 + (6m+9)x - (6m+9) = 0$$

$S = -\frac{b}{a}$ $\quad P = \frac{c}{a}$ $\quad S = \frac{-\cancel{(6m+9)}^{3}}{\cancel{(2m+3)}} = -3$ $\quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$

$P = \frac{-\cancel{(6m+9)}^{3}}{\cancel{(2m+3)}} = -3$

$\frac{S}{P} = \frac{-3}{-3} = \boxed{1}$

4

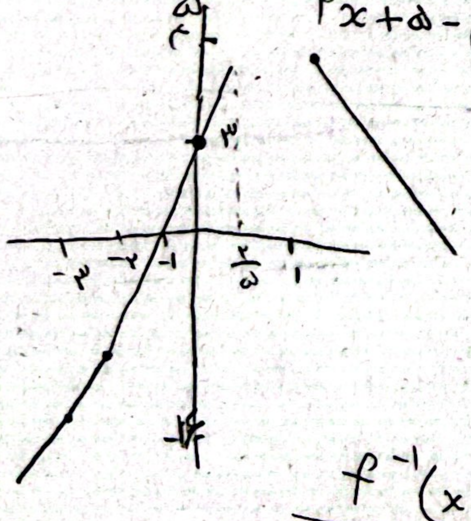
$$f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(5x-2)^2} = |2x+5| - |5x-2|$$

$-\frac{5}{2}$ $\qquad \frac{2}{5}$

$x < -\frac{5}{2}$ $\quad -2x-5-(2-5x) = -2x-5-2+5x = 3x-7$

$-\frac{5}{2} \le x \le \frac{2}{5}$ $\quad 2x+5-(2-5x) = 2x+5-2+5x = 7x+3$

$x > \frac{2}{5}$ $\quad 2x+5-(5x-2) = 2x+5-5x+2 = -3x+7$



$x = -3 \longrightarrow -9-7 = -16$

$x = 0 \longrightarrow y = 3$

$x = 1 \longrightarrow y = 4$

با توجه به شکل ی نمودار در بازه $x > \frac{2}{5}$ این تابع نزولی است که ضابطه آن $f(x) = -3x+7$

$f^{-1}(x) \longrightarrow y = -3x+7$ $\qquad \frac{y-7}{-3} = x$ $\qquad \frac{7-y}{3} = x$

$y = \frac{7-x}{3}$ $\qquad \boxed{f^{-1}(x) = \frac{7-x}{3}}$

Scanned with CamScanner

(5)

$g(x) = 2f(3x) - 1 = t \qquad g(x) = t \qquad g^{-1}(t) = x$

$2f(3x) - 1 = t \qquad 2f(3x) = t+1 \qquad f(3x) = \frac{t+1}{2} \qquad f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right) = 3x$

$x = \dfrac{f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)}{3} \qquad g^{-1}(t) = \dfrac{f^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)}{3}$

$$\left.\begin{aligned} g^{-1}(x) &= \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ g^{-1}(x) &= a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a = \frac{1}{3} \quad b = 1 \quad c = 2 \quad d = 0$$

$\dfrac{ac+d}{2b} = \dfrac{\frac{2}{3}+0}{2} = \dfrac{2}{6} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

---

(6)

$f(x) = x + 2\sqrt{x} \qquad y = \underbrace{(\sqrt{x}+1)^2}_{2\sqrt{x}+1+x} - 1 \longrightarrow y+1 = (\sqrt{x}+1)^2$

$\sqrt{y+1} = 1 + \sqrt{x} \qquad \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x} \qquad y + \cancel{1} + \cancel{1} - 2\sqrt{y+1} = x^{2}$

$y = x - 2\sqrt{x+1} + 2 \qquad f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 2$

$D_{f^{-1}(x)} = R_f = [0, +\infty)$

---

(7) او آن با یک تابع وارون خود را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می کند

باید ضابطه را مساوی x قرار دهیم

$x = x - 1 + 2^x \qquad 2^x = 1$

$x = 0$

تنها یک جواب دارد

۸

$f^{-1}(x)=t \qquad f(t)=x=t^3+4t \qquad f^{-1}(x)-x=t-(t^3+4t)=$

$-t^3-3t\geq 0 \qquad t^3+3t\leq 0 \qquad t(t^2+3)\leq 0 \qquad D=(-\infty,0]$

صفر ریشه ندارد

$\begin{array}{c|c} - & + \\ \end{array}$ (0)

چند عدد صحیح نامنفی؟ ← تنها عدد صفر پس یک عدد

۹

$$y=-x+\sqrt{x+4}\xrightarrow[\text{تا بیاد اول و سوم یعنی اون نگردد}]{\text{تمرینه نسبت به لیفربعاز}} y=-\underbrace{\left(\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{17}{4}$$

$$-\left(x+4-\sqrt{x+4}+\frac{1}{4}\right)=-x+\sqrt{x+4}-\frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{4}-y=\left(\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{17}{4}-y}=\sqrt{x+4}-\frac{1}{2} \qquad \sqrt{\frac{17}{4}-y}+\frac{1}{2}=\sqrt{x+4}$$

$$\frac{17}{4}-y+\sqrt{\frac{17}{4}-y}+\frac{1}{4}=x+4 \qquad x=-y+\sqrt{\frac{17}{4}-y}+\frac{18-16}{4}$$

$$x=-y+\sqrt{\frac{17}{4}-y}+\frac{1}{2} \qquad y=-x+\sqrt{\frac{17}{4}-x}+\frac{1}{2}$$

← ضابطه تابع معکوس

$$g(x)=-(x+4)+\sqrt{-(x+4)+\frac{17}{4}}+\frac{1}{2}$$

← ۴ واحد به چپ انتقال یعنی بای x می‌ذاریم $x+4$

$$g(x)=-x-4+\sqrt{-x+\frac{17-16}{4}}+\frac{1}{2}=-x-4\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-\frac{7}{4}$$

$$-x-4\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-\frac{7}{4}=x-3 \qquad 2x+\frac{19}{4}+4\sqrt{-x+\frac{1}{4}}=0$$

$$-2\left(\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-1\right)^2=-2\left(-x+\frac{1}{4}+1-2\sqrt{-x+\frac{1}{4}}\right)=2x\cancel{-\frac{1}{2}+1}+4\sqrt{-x+\frac{1}{4}}$$

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۹

$$-2\left(\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-1\right)^2+\frac{17}{4}=0 \qquad 2\left(\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-1\right)^2=\frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{8}=\left(\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-1\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{17}{8}}=\sqrt{-x+\frac{1}{4}}-1$$

$$\sqrt{\frac{17}{8}}+1=\sqrt{-x+\frac{1}{4}} \qquad \frac{17}{8}+1+2\sqrt{\frac{17}{8}}=-x+\frac{1}{4}$$

$$\frac{25-2}{8}+2\sqrt{\frac{17}{8}}=-x \qquad x=\frac{23}{8}+2\sqrt{\frac{17}{8}}$$

رعایت شده پس جواب

یک نقطه برخورد دارند که ۳- است و دامنه

این مختصات طول آن است و چون [illegible] معادل

قابل قبول است

۱۵

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \xrightarrow[\text{با عوض } x \text{ و } y \text{ عوض}]{\text{آنرا معکوس کرده و}} \sqrt{y}+\sqrt{x}=2$$

تابع همان می‌شود $\Longleftarrow$ ۱

$$f(x)=f^{-1}(x) \qquad f\circ f(x)=f^{-1}\circ f(x)=x$$

$\longrightarrow$ پس تابع $y=x$ را رسم کرده

اما باید به دامنه و برد توجه شود

$x\geq 0 \quad y\geq 0$