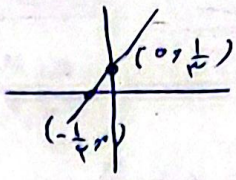
۱- (۲)

$2y = 4x - 1$

$2y + 1 = 4x$

$\frac{2y}{4} + \frac{1}{4} = x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x}{4} + \frac{1}{4}$



$(0, \frac{1}{4})$ $(-\frac{1}{4}, 0)$

$\frac{4x}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\frac{4x}{4} = -\frac{1}{4}$

مساحت مثلث $= \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{12}$ ✓

۲- (۲)

الف) $x^2 - 4x + 4 \longrightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 1$

$y_S = (1)^2 - 4(1) + 4 = 1$

$y = (x-1)^2 + 1$

$y - 1 = (x-1)^2 \longrightarrow \sqrt{y-1} = x - 1$

$\sqrt{y-1} + 1 = x \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$ ✓

$x \in [1, +\infty)$ سمی یک به یک است

۲- باید دقت کنیم که یک سهمی درصورتی تابع است که از راس سهمی یا در بازه صعودی یا در بازه نزولی رسم شود. آن را رسم کنید.

$x \in [1, +\infty)$ ✓

$D_{f^{-1}} = R_f \in [2, +\infty)$ ✓

ب) $y = x^2 - 4x + 4$ طبق توضیح قبلی یک به یک است.

کمترین y حالت $y = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$

$y = (x-2)^2 + 2$

$\hookrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2$ ✓ $\rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [2, +\infty)$ ✓

۳- (۲)

$f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2}$

$\sqrt{(2x-4)^2} \Rightarrow |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 2 \\ 4-2x & x < 2 \end{cases}$

$\xrightarrow{2x-4 \geq 0, x \geq 2}$ $2x - (2x-4) = 2x - 2x + 4 = 4$ یک به یک است ← وارون نشدنی

$\xrightarrow{4-2x > 0, x < 2}$ $2x - (4 - 2x) = 2x - 4 + 2x = 4x - 4$ ← وارون پذیر است

$x < 2$

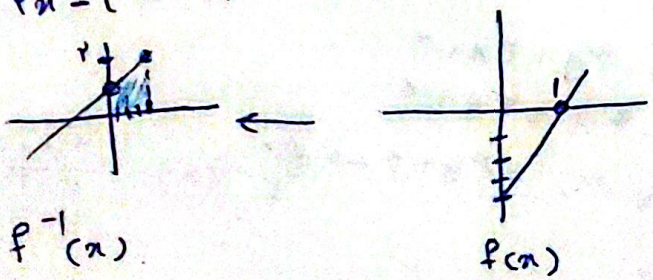
$4x < 8$

$4x - 4 < 4$

$g = 4x - 4$

$y + 4 = 4x$

$\frac{y}{4} + 1 = x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$



$f^{-1}(x)$ $f(x)$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$

$R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 4]$

$S = \frac{(1+2) \times 4^2}{8} = 3 \times 2 = 6$ ✓

۴ - (۲)

$f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$ بتوان دوم رسانیم

$\frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \rightarrow x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$

$x_1 = x_2$ یک جواب است ولی نمی‌تواند جواب تابع باشد

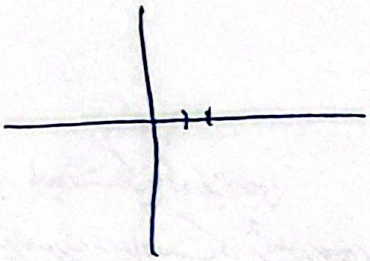
$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}}$

$x^2 = \frac{y^2}{y^2-5} \rightarrow x^2y^2 - 5x^2 = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \rightarrow y = +\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$ عملیات

$= \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}}$

---

۵ - (۲)



$g(x) \begin{cases} x^2-4x+k & x \geq 2 \rightarrow x_s = 2 \rightarrow 2^2-4(2)+k = -4+k \\ -x^2+6x+2k & x < 2 \rightarrow -(4)+6(2)+2k = 8+2k \end{cases}$

$x_s = \frac{-(6)}{-2} = 3$

$-4+k \geq 8+2k \rightarrow -12 \geq k$

$k \in (-\infty, -12]$

---

۶ - (۲)

$f(x) = 3x + |x| \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = 4x \rightarrow \frac{1}{4}x = y \\ x < 0 \rightarrow y = 2x \rightarrow \frac{1}{2}x = y \end{cases}$

$\rightarrow g(x) = ax + b|x|$

$g(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}|x|$

ضابطه: $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

فاصله از ضابطه: $\frac{1}{8} - \frac{4}{8} = -\frac{3}{8}$

$ab = \frac{1}{8} \times -\frac{3}{8} = -\frac{3}{64}$

---

۷ - (۲)

$f(x) = \frac{3x+k}{x+3} \xrightarrow{(2,-10)} -10 = \frac{3(2)+k}{2+3} \rightarrow 2+3m = -1$

$3m = -3$

$y = \frac{3x+k}{x-3} \rightarrow yx - 3y = 3x + k$

$yx - 3x = 3y + k$

$x(y-3) = 3y + k \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3+3x}{x-3}$

$f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x$

$\underbrace{f \circ f^{-1}(x)}_{x} \hookrightarrow \frac{3+3x}{x-3} = 0 \rightarrow 3+3x = 0$

$3x = -3$

$x = -\frac{3}{3}$

(۲)

$f(۳-۲x) = t$

$f^{-1}(t) = ۳ - ۲x$

$۲ - g(\frac{x}{۲}) = t$

$۲ - t = g(\frac{x}{۲}) \rightarrow g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲} \rightarrow ۴g^{-1}(۲-t) = ۲x$

$f^{-1}(t) = ۳ - ۲x \Rightarrow f^{-1}(t) = ۳ - ۴g^{-1}(۲-t) \xrightarrow{t=-۲} f^{-1}(۲) = ۳ - ۴g^{-1}(۴)$

$۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = ۴g^{-1}(۴) + ۳ - ۴g^{-1}(۴) = ۳$ ✓

$y = \frac{\dots}{1+x} \Rightarrow \frac{-5x-13}{1+x} \longrightarrow \frac{5x+13}{1+x}$ ۹ـ قرینه نسبت مبدأ مختصات ← x و y هر دو قرینه می‌شوند.

(۲)

$y = \frac{5(x-2)+13}{1+x-2} - 3 = \frac{5x+3}{x-1} - 3 = \frac{5x+3-3x+3}{x-1}$ دو واحد به راست ← به جای x، x-2 می‌گذاریم

$= \frac{2x+6}{x-1} \xrightarrow{\text{برای وارون کردن}} y = \frac{x+6}{x-2}$

$\frac{2x+6}{x-1} = \frac{x+6}{x-2}$

$\frac{2x+6}{x-1} - \frac{x+6}{x-2} = 0$

$\frac{2x^2+2x-12-x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-3x-6}{x^2-3x+2} = 0$

$S = \frac{-b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3$ ✓

۱۰ـ

$\begin{cases} x \in Z & y = x + 4x = 5x \\ x \notin Z & y = x + 4(x-1) = 5x - 4 \end{cases}$

قرینه نسبت به محور $y=x$ همان وارون است → $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$ (۲)

$y = 5x - 4$

$y + 4 = 5x \to f^{-1}(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{5}$

$(f-g)(x) \begin{cases} x \in Z & 5x - (\frac{1}{5}x) = \frac{24x}{5} \\ x \notin Z & 5x - 4 - (\frac{x}{5} + \frac{4}{5}) = \frac{24x}{5} - \frac{24}{5} \end{cases}$

ب) $y = x + 4[x] \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} x = y + 4[y]$

$[x] = [y + 4[y]] \Rightarrow [x] = [y] + 4[y]$

$[x] = 5[y]$

$[y] = \frac{[x]}{5}$

$x = y + \frac{4}{5}[x] \Rightarrow y = x - \frac{4}{5}[x]$

$f(x) = x + 4[x]$

$g(x) = x - \frac{4}{5}[x]$

$\to f(x) - g(x) = x + 4[x] - x + \frac{4}{5}[x] = \frac{24}{5}[x]$ ✓