A دوازدهم دختر — تکلیف شماره ۱۰ — مرسا ملکی

۲۵ عالی نوشتی

۱) ②

$2y = 3x - 1 \longrightarrow 2x = 3y - 1 \longrightarrow 3y = 2x + 1 \longrightarrow y = \dfrac{2x+1}{3} \xrightarrow{y=0} x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

$\xrightarrow{x=0} y = \dfrac{1}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

$S = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{12}$ ✓

---

۲) ②

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \qquad x_{min} = 1$

$x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$

$y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$D_f = R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

$\longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$ ✓

$D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$ ✓

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \qquad x_{min} = 1 \qquad x \in [3, +\infty)$

$y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \pm\sqrt{x-2} + 1$

$D_f = R_{f^{-1}} = [3, +\infty)$

$R_f = D_{f^{-1}} = [4, +\infty)$

$\longrightarrow f^{-1} = \sqrt{x-2} + 1$ ✓

$D_{f^{-1}} = [4, +\infty)$ ✓

---

۳) ②

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2}$

$f(x) = 2x - |2x - 4| \xrightarrow{x \geq 2} 2x - 2x + 4 = 4$ ✗ وارون‌ناپذیر

$\xrightarrow{x \leq 2} 2x + 2x - 4 = 4x - 4$ ✓ وارون‌پذیر

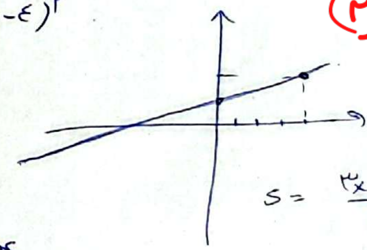
$y = 4x - 4 \longrightarrow x = \dfrac{y+4}{4} \longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{4}$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4] \quad , \quad R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2]$

$x \leq 2$

$4x \leq 8$

$4x - 4 \leq 4$



$S = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ ✓

---

۴) ②

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$

همواره + → x و y هم‌علامت

$(x_1, y_1) \rightarrow y_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}}$

$(x_2, y_2) \rightarrow y_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}}$

$\xrightarrow{y_1 = y_2} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \longrightarrow \dfrac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \dfrac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \longrightarrow$

$\cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_2^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 \longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2$

x و y هم‌علامت ← یک y ، ۲ تا x مختلف العلامت ✗ ← $x_1 = x_2$ ✓

$y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 - 5} \longrightarrow x^2 = \dfrac{5y^2}{y^2 - 1} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5y^2}{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{x و y هم‌علامت}} x = \dfrac{\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2 - 1}} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \dfrac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ✓

---

۵) ②

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases}$

$x \geq 2 \xrightarrow{x_{min}} 2$ ✓ جزو دامنه $\xrightarrow{x=2} 4 - 8 + k = k - 4$

$x < 2 \xrightarrow{x_{max}} 3$ ✗ جزو دامنه $\rightarrow 2$ ✓ $\xrightarrow{x=2} -4 + 12 + 3k = 3k + 8$

$3k + 8 \leq k - 4 \longrightarrow 2k \leq -12 \longrightarrow \boxed{k \leq -6}$ ✓

۶) ۲

$f(x) = ۳x + |x| \xrightarrow[x\geq ۰]{y \geq ۰} y = ۴x \rightarrow x = \frac{y}{۴} \rightarrow y = \frac{x}{۴}$

$\xrightarrow[x<۰,\ y<۰]{} y = ۲x \rightarrow x = \frac{y}{۲} \rightarrow y = \frac{x}{۲}$

$y\geq ۰,\ x\geq ۰ \xrightarrow{\text{منطبق}} \dfrac{\frac{x}{۲}+\frac{x}{۴}}{۲} = \dfrac{۳x}{۸} \rightarrow a = \dfrac{۳}{۸}$

$x < ۰ \rightarrow \frac{۳}{۸}x - bx = \frac{x}{۲} \rightarrow b = -\frac{۱}{۸} \rightarrow \boxed{ab = -\frac{۳}{۶۴}}$ ✓

---

۷) ۲

$f(x) = \dfrac{۳x+۴}{x+m} \longrightarrow \dfrac{۶+۴}{۲+m} = -۱۰ \rightarrow ۲+m = -۱ \rightarrow m = -۳ \rightarrow f(x) = \dfrac{۳x+۴}{x-۳} \rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$

$\underset{x\neq ۳}{y = f\circ f^{-1}(x)} + \underset{x=y}{f^{-1}(x)} \longrightarrow x + \dfrac{۳x+۴}{x-۳} = y \longrightarrow x + \dfrac{۳x+۴}{x-۳} = x \longrightarrow ۳x + ۴ = ۰ \rightarrow \boxed{x = -\frac{۴}{۳}}$ ✓

---

۸) ۲

$f(۲-۲x) = t \rightarrow f^{-1}(t) = ۲-۲x$

$۲ - g(\frac{x}{۲}) = t \rightarrow g(\frac{x}{۲}) = ۲-t \rightarrow g^{-1}(۲-t) = \frac{x}{۲} \rightarrow ۲x = ۴g^{-1}(۲-t) \rightarrow$

$f^{-1}(t) = ۳-۲x \rightarrow f^{-1}(t) = ۳ - ۴g^{-1}(۲-t) \xrightarrow{t=-۲} f^{-1}(-۲) = ۳ - ۴g^{-1}(۴) \rightarrow$

$۴g^{-1}(۴) + f^{-1}(-۲) = ۴g^{-1}(۴) + ۳ - ۴g^{-1}(۴) = \boxed{۳}$ ✓

---

۹) ۲

$y = \dfrac{۵x-۱۳}{۱-x} \longrightarrow -y = \dfrac{-۵x-۱۳}{۱+x} \rightarrow y = \dfrac{۵x+۱۳}{x+۱} \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} \dfrac{۵(x-۲)+۱۳}{(x-۲)+۱} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}}$

$y = \dfrac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱} \longrightarrow f(x) = \dfrac{۲x+۶}{x-۱}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+۶}{x-۲}$

$\Big\} \longrightarrow \underset{x\neq ۱}{\dfrac{۲(x+۳)}{x-۱}} = \underset{x\neq ۲}{\dfrac{x+۶}{x-۲}} \longrightarrow ۲(x^۲+x-۶) = x^۲+۵x-۶$

$۲x^۲ + ۲x - ۱۲ = x^۲ + ۵x - ۶ \longrightarrow x^۲ - ۳x - ۶ = ۰ \longrightarrow \underset{x\neq ۱,۲}{S = \frac{-b}{a} = ۳}$ ✓

---

۱۰) ۲

$y = x + ۴[x] \xrightarrow{\text{وارون}} x = y + ۴[y]$

$[x] = [y + ۴[y]] \rightarrow [x] = [y] + ۴[y] \longrightarrow$

$[x] = ۵[y] \rightarrow [y] = \frac{[x]}{۵} \Rightarrow ۴[y] = \frac{۴[x]}{۵}$

$x = y + \frac{۴}{۵}[x] \longrightarrow y = x - \frac{۴}{۵}[x]$

$f(x) = x + ۴[x]$

$g(x) = x - \frac{۴}{۵}[x]$

$\Big\} \longrightarrow f(x) - g(x) = \frac{۲۴}{۵}[x]$ ✓