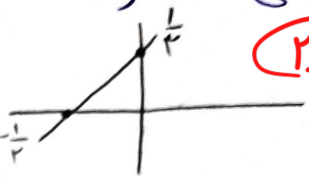
هیاتی - ۱۲ دفتر A

۱۹

① ۲

$2y = 3x - 1 \xrightarrow{\text{وارون}} 2x = 3y - 1 \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

x	0	$-\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{3}$	0



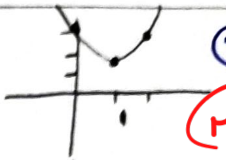
← مساحت ∆ $= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} \leftarrow \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} \leftarrow \boxed{\frac{1}{12}}$ ✓

---

② ۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty) \xrightarrow[\text{جدول شکل می‌کشیم}]{\text{برای بررسی یک به یک}} \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

0	1	2
3	2	3



← چون دامنه از یک به بعد است، در این بازه تابع یک به یک است

$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = x^2 - 2x + 1 + 2 \rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \xrightarrow[\text{y را عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و}} x = (y-1)^2 + 2 \quad (y-1)^2 = x - 2$

$y - 1 = \sqrt{x-2} \quad y = \sqrt{x-2} + 1 \quad D_{f^{-1}}(x) = [2, +\infty)$ ✓ برد $f(x)$

ج) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty) \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{طبق شکل}}$

→ از ۳ به بعد یک به یک می باشد

$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = \sqrt{x-2} + 1 \quad D_{f^{-1}}(x) = [6, +\infty)$ ✓

برد $f(x)$

---

④ ۲

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2 \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 5}} \quad x_1\sqrt{x_2^2 + 5} = x_2\sqrt{x_1^2 + 5}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x_1^2(x_2^2 + 5) = x_2^2(x_1^2 + 5) \rightarrow \cancel{x_1^2 x_2^2} + 5x_1^2 = \cancel{x_2^2 x_1^2} + 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$x_1 = \pm x_2 \rightarrow$ و نفی شرط دو، x و x مختلف العلامت داشته باشند $\rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow$ یک به یک است ✓

$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ صورت سوال! $\rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5} \rightarrow y^2x^2 + 5x^2 = y^2 \quad y^2(x^2 - 1) = +5x^2$

$y^2 = \frac{+5x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{+5x^2}{x^2 - 1}}$ ✓

---

⑤ ۲

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) \leq \lim_{x \to 2^+} f(x) \quad 4 - 8 + k \geq -4 + 12 + 3k$

$-4 + k \geq 3k + 8 \quad 2k \leq -12 \quad \boxed{k \leq -6}$ ✓

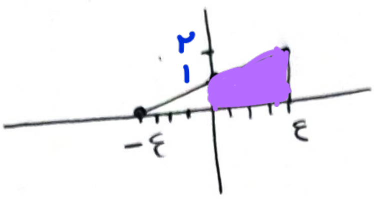
③ ۱,۵

$f(x)=۲x-\sqrt{۱۶-۴x(۴-x)} \rightarrow ۲x-\sqrt{۱۶-۱۶x+۴x^۲} \rightarrow ۲x-\sqrt{(۲x-۴)^۲} \rightarrow ۲x-|۲x-۴|$

$\begin{cases} -۴ & x\geq ۲ \rightarrow \text{غیریک به یک} \\ ۴x-۴ & x<۲ \longrightarrow f(x)=۴x-۴ \end{cases}$ $f^{-1}(x) \Rightarrow x=۴y-۴$ $\boxed{y=\frac{x}{۴}+۱ \quad x<۴}$ ✓

$f \geq ۰$

۴	۰	-۴
۲	۱	۰



$S=\frac{۸\times۲}{۲} \rightarrow \boxed{S=۸}$

سوال مساحت با جهت مثبت محور رو نخواد!

$S=\frac{(۱+۲)۴}{۲}=\boxed{۶}$

---

④ ۱,۷۵

$f(x)=۳x+|x| \rightarrow \begin{cases} ۴x & x\geq۰ \rightarrow \text{وارون} \Rightarrow y=\frac{x}{۴} \\ ۲x & x<۰ \rightarrow \text{وارون} \Rightarrow y=\frac{x}{۲} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۴} & x\geq۰ \\ \frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases}$

$a+b=\frac{۱}{۴}$ $a=\frac{۳}{۸}$

$a-b=\frac{۱}{۲}$ $b=\frac{-۱}{۸}$

میانگین $=\frac{\frac{x}{۴}+\frac{x}{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{۳x}{۸}$ ✓ اختلاف $=-\frac{x}{۸}$ به فرض قدر مطلق : $\left|\frac{x}{۸}\right|+\frac{۳x}{۸}$ $\boxed{ab=\frac{-۳}{۶۴}}$

---

⑦ ۲

$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \rightarrow \left|\begin{matrix}۲\\-۱۰\end{matrix}\right.$ $-۱۰=\frac{۱۰}{۲+m}$ $m=-۳$ $f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}$

$f^{-1}(x) \rightarrow yx-۳y=۳x+۴$ $x(y-۳)=۳y+۴$ $x=\frac{۳y+۴}{y-۳} \rightarrow y=\frac{۳x+۴}{x-۳}$

$f\circ f^{-1}(x)=x$ $x+\frac{۳x+۴}{x-۳}$ $\frac{x^۲-\cancel{۳x}+\cancel{۳x}+۴}{x-۳} \rightarrow \frac{x^۲+۴}{x-۳}$

$\frac{x^۲+۴}{x-۳}=x$ $\cancel{x^۲}+۴=\cancel{x^۲}-۳x \rightarrow \boxed{x=-\frac{۴}{۳}}$ ✓

---

⑧ ۲

$f(۳-۲x)=۲-g(\frac{x}{۲})$ $۴g^{-1}(۴)+f^{-1}(-۲) \rightarrow g(?)=۴$ و $f(?)=-۲$

$f(?)=-۲ \rightarrow -۲=۲-g(\frac{x}{۲})$ $g(\frac{x}{۲})=۴$ $g(?)=۴$ $?=\frac{x}{۲} \rightarrow \underbrace{۴(\frac{x}{۲})+۳-۲x}$

$g(?)=۴ \rightarrow ۴=۲-f(۳-۲x)$ $f(۳-۲x)=-۲$ $f(?)=-۲$ $?=۳-۲x$

✓ $\cancel{۲x}+۳-\cancel{۲x}=\boxed{۳}$

---

⑨ ۲

$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور مختلف}} -y=\frac{-۵x-۱۳}{۱+x}$ $y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x}$

۲ واحد به راست $\frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+(x-۲)} \rightarrow \frac{۵x+۳}{x-۱}$ ۳ واحد پایین $=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \rightarrow \frac{۲x+۶}{x-۱}$

$f^{-1}(x)=yx-y=۲x+۶$ $x(y-۲)=۶+y$ $x=\frac{۶+y}{y-۲}$ $y=\frac{x+۶}{x-۲}$

$f^{-1}(x)=f(x)$ $\frac{x+۶}{x-۲}=\frac{۲x+۶}{x-۱}$ $\underbrace{۲x^۲+۶x-۴x-۱۲=x^۲+۶x-x-۶}$

$x^۲-۳x-۶ \xrightarrow{\text{مجموع جواب ها}} -\frac{b}{a}=\boxed{۳}$ ✓

⑩

$y = x + ۴[x] \xrightarrow[\text{معکوس تابع است}]{\text{قرینه نسبت به خط } y=x} [y] = [x + ۴[x]]$ $\quad [y] = ۵[x]$

دقت!

پس $[x] = \frac{[y]}{۵}$ ۱٫۷۵

پس $۴[x] = \overset{y-x}{\cancel{x-y}}$ $\quad [x] = \frac{\overset{y-x}{\cancel{x-y}}}{۴} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{1}{۴}\overset{y}{\cancel{x}} - \frac{1}{۴}\overset{x}{\cancel{y}} = \frac{[y]}{۵}$ $\quad \frac{1}{۴}x = -\frac{1}{۵}[y] + \frac{1}{۴}y$

$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} \frac{1}{۴}y = -\frac{1}{۵}[x] + \frac{1}{۴}x \xrightarrow{\times ۴} y = -\frac{۴}{۵}[x] + x$

$f(x) - g(x) \longrightarrow \cancel{x} + ۴[x] + \frac{۴}{۵}[x] - \cancel{x} \longrightarrow \boxed{\frac{\cancel{۱۶}}{۵}[x]}$

$\frac{۲۴}{۵}$