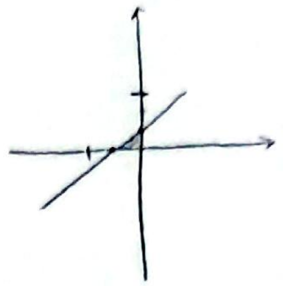
نام و نام خانوادگی ...فاطمه کریمی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۱.. کلاس ...ریاضی...

۱

$2y=3x-1 \xrightarrow[\text{عوض}]{\text{y و x}} 2x=3y-1 \to 3y=2x+1$

$y=\frac{2x+1}{3} \xrightarrow{y=0} x=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2},0)$

$\xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{3} \Rightarrow (0,\frac{1}{3})$



$S=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{12}$

۲

الف) $y=x^2-2x+3$ $\quad x_{min}=\frac{-(-2)}{2}=1$ از ۱ تابع وارون پذیر

$x\in[1,+\infty)$

$y=(x-1)^2+2 \to y-2=(x-1)^2 \to x=\pm\sqrt{y-2}+1$

جای y و x عوض $\Rightarrow y=\pm\sqrt{x-2}+1$

$D_f=R_{f^{-1}}=[1,+\infty)$ $\quad f^{-1}(x)=+\sqrt{x-2}+1$

$R_f=D_{f^{-1}}=[2,+\infty) \to D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

ب) $y=x^2-2x+3$ $\quad x_{min}=\frac{-b}{2a}=-\frac{(-2)}{2}=1$ از ۱ تابع وارون پذیر

$x\in[3,+\infty)$

$y=(x-1)^2+2 \to y-2=(x-1)^2 \to x=\pm\sqrt{y-2}+1$

جای y و x عوض $\quad y=\pm\sqrt{x-2}+1$

$D_f=R_{f^{-1}}=[3,+\infty)$ $\quad f^{-1}=+\sqrt{x-2}+1$

$R_f=D_{f^{-1}}=[6,+\infty) \to D_{f^{-1}}=[6,+\infty)$

۳

$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)}=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}=2x-\sqrt{(2x-4)^2}$

$f(x)=2x-|2x-4| \xrightarrow{x>2} 2x-2x+4=4$ وارون ناپذیر

$\xrightarrow{x<2} 2x+2x-4=4x-4$ وارون پذیر

$y=4x-4 \Rightarrow x=\frac{y+4}{4}$

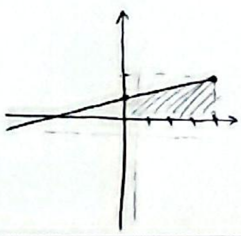
$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{4}$

$x\le 2$

$4x\le 8$

$4x-4\le 4$

$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,4]$ / $R_{f^{-1}}=D_f=(-\infty,2]$



$\Rightarrow S=\frac{(1+2)\times 4}{2}=\boxed{6}$

۴

اثبات یک به یک بودن از طریق رسم نمودار هم را (فقط اینکه ۲ مجانب عمودی و ۲ مجانب افقی داریم)

± 1 $\quad \pm\sqrt{5}$

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ $\quad (x_1,y_1)\to y_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}$

همیشه x و y هم علامت

$(x_2,y_2) \to y_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$

$y_1=y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\Rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-5x_1^2=\cancel{x_1^2x_2^2}-5x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2 \to$ x و y هم علامت $\to$ x با y مختلف العلامت $\to x_1=x_2$

$y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \xrightarrow{\text{x و y هم علامت}} x=\frac{+\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{\text{x و y عوض}} y=\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

۵

$x_{min}=-\frac{(-4)}{2}=2$ جزو دامنه ۲

$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & x\ge 2 \\ -x^2+6x+3k & x<2 \end{cases}$

(min) $x=2 \Rightarrow 4-8+k=k-4$

(max) $x=2 \Rightarrow -4+12+3k=3k+8$

$3k+8\le k-4$

$2k\le -12$

$\boxed{k\le -6}$

$x_{max}=\frac{-(6)}{-2}=3$ جزو دامنه x ۳ $\Rightarrow$ ۲>

$f(x)=3x+|x| \xrightarrow[x\geq 0]{y\geq 0} y=4x \to x=\frac{y}{4} \to y=\frac{x}{4}$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$)

$\xrightarrow[x<0,\ y<0]{} y=2x \to x=\frac{y}{2} \to y=\frac{x}{2}$ ($x<0$, $y<0$)

منصف

$\Rightarrow \dfrac{\frac{x}{4}+\frac{x}{2}}{2}=\frac{3x}{8} \Rightarrow a=\frac{3}{8}$

$x<0 \Rightarrow \frac{3}{8}x-bx=\frac{x}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{8}$

$\to ab=\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\boxed{\frac{-3}{64}}$ ۶

$f(x)=\frac{3x+4}{x+m}$, $(2,-10)$ $\to \frac{\cancel{6+4}^{\,10 \to -1}}{2+m}=\cancel{-10}^{\,1} \Rightarrow 2+m=-1 \Rightarrow m=-3 \Rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$

$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x) \Rightarrow x+\frac{3x+4}{x-3}=y$, $x\neq 3$, $x=y$

$\to \cancel{x}+\frac{3x+4}{x-3}=\cancel{x} \to 3x+4=0$

$\boxed{x=-\frac{4}{3}}$ ۷

$f(3-2x)=t \Rightarrow f^{-1}(t)=3-2x$

$2-g\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=2-t \Rightarrow g^{-1}(2-t)=\frac{x}{2} \to 2x=4g^{-1}(2-t)$

$\Rightarrow f^{-1}(t)=3-\underline{2x} \Rightarrow f^{-1}(t)=3-4g^{-1}(2-t) \xrightarrow{t=-2} f^{-1}(-2)=3-4g^{-1}(\cancel{2-(-2)}^{\,4})$ ۸

$\Rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=\cancel{4g^{-1}(4)}+3-\cancel{4g^{-1}(4)}=\boxed{3}$

$y=\frac{5x-12}{1-x} \Rightarrow -y=\frac{-5x-12}{1+x} \Rightarrow y=\frac{5x+12}{x+1}$ قرینه نسبت به مبدأ مختصات $\Leftarrow$ x و y را قرینه می‌کنیم $\Leftarrow$

$\xrightarrow[x-2]{\text{۲ واحد راست}} y=\frac{5(x-2)+12}{(x-2)+1} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=\frac{5(x-2)+12}{(x-2)+1}-3 \to y=\frac{5x+2-3x+3}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$ ۹

$f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$, $f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2}$ $\to \frac{2(x+3)}{x-1}=\frac{x+6}{x-2}$ ($x\neq 1$, $x\neq 2$) $\Rightarrow 2(x^2+x-6)=x^2+5x-6$

$2x^2+2x-12=x^2+5x-6 \Rightarrow x^2-3x-6=0 \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{1}=\boxed{3}$

$x\neq 1,2$ ✓

$y=x+4[x] \xrightarrow{\text{x و y را عوض}} x=y+4[y]$ قرینه نسبت به $y=x$ $\Leftarrow$ تابع وارون $\Leftarrow$

$[x]=[y+4[y]] \Rightarrow [x]=[y]+4[y]$

$[x]=5[y] \Rightarrow [y]=\frac{[x]}{5} \Rightarrow 4[y]=\frac{4}{5}[x]$

$\Rightarrow x=y+\frac{4}{5}[x] \Rightarrow y=x-\frac{4}{5}[x]$ ۱۰

$f(x)=x+4[x]$, $g(x)=x-\frac{4}{5}[x]$ $\to f(x)-g(x)=\cancel{x}+4[x]-\cancel{x}+\frac{4}{5}[x]=\boxed{\frac{24}{5}[x]}$