۲۵ عالی نوشین ز

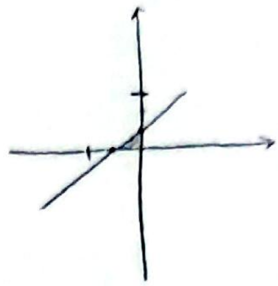
نام و نام خانوادگی ....فاطمه کریمی.... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۵.. کلاس ....یازدهم ریاضی A....

۱

$2y=3x-1 \xrightarrow[\text{عوض}]{y \text{ و } x} 2x=3y-1 \to 3y=2x+1$

$y=\frac{2x+1}{3} \xrightarrow{y=0} x=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2},0)$

$\xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{3} \Rightarrow (0,\frac{1}{3})$



$S=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{12}$ ✓

۲

۲

الف) $y=x^2-2x+3 \quad x_{min}=\frac{-(-2)}{2}=1$ تابع صعودی پذیر

$x\in[1,+\infty)$

$y=(x-1)^2+2 \to y-2=(x-1)^2 \to x=\pm\sqrt{y-2}+1$

$\xrightarrow{\text{جای } y \text{ و } x \text{ عوض}} y=\pm\sqrt{x-2}+1$

$D_f=R_{f^{-1}}=[1,+\infty)$ $\quad f^{-1}(x)=+\sqrt{x-2}+1$

$R_f=D_{f^{-1}}=[2,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$ ✓

ب) $y=x^2-2x+3 \quad x_{min}=\frac{-b}{2a}=-\frac{(-2)}{2}=1$ تابع وارون پذیر

$x\in[3,+\infty)$

$y=(x-1)^2+2 \to y-2=(x-1)^2 \to x=\pm\sqrt{y-2}+1$

جای y و x عوض $y=\pm\sqrt{x-2}+1$

$D_f=R_{f^{-1}}=[3,+\infty)$ $\quad f^{-1}=+\sqrt{x-2}+1$

$R_f=D_{f^{-1}}=[6,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=[6,+\infty)$ ✓

۲

۳

$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)}=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}=2x-\sqrt{(2x-4)^2}$

$f(x)=2x-|2x-4| \xrightarrow{x\geq 2} 2x-2x+4=4$ وارون ناپذیر

$\xrightarrow{x<2} 2x+2x-4=4x-4$ وارون پذیر

$y=4x-4 \Rightarrow x=\frac{y+4}{4}$

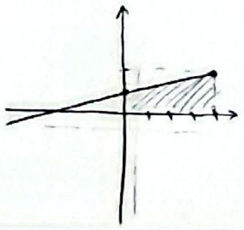
$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{4}$

$x<2$

$4x<8$

$4x-4<4$

$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,4] / R_{f^{-1}}=D_f=(-\infty,2]$



$\Rightarrow S=\frac{(1+2)\times 4}{2}=\boxed{6}$ ✓

۲

۴

اثبات یک‌به‌یک بودن از طریق رسم نمودار هم راه (فقط اثبات ۲ مجانب عمودی $\pm\sqrt{5}$ و ۲ مجانب افقی ± 1 داریم)

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ (مخرج همواره +) $\Rightarrow$ x و y هم علامت

$(x_1,y_1) \to y_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}$

$(x_2,y_2) \to y_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$

$\xrightarrow{y_1=y_2} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\Rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-5x_1^2=\cancel{x_1^2x_2^2}-5x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2 \to$ x و y هم علامت $\to$ یک y و دو x مختلف‌العلامت ✗ $\to x_1=x_2$

$y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} \xrightarrow{x \text{ و } y \text{ هم علامت}} x=\frac{+\sqrt{5}\,y}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} y=\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$ ✓

۲

۵

$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+K & x\geq 2 \\ -x^2+6x+3K & x<2 \end{cases}$

$x_{min}=\frac{-(-4)}{2}=2$ جزو دامنه

$\xrightarrow{(min)\ x=2} 4-8+K=K-4$

$\xrightarrow{(max)\ x=2} -4+12+3K=3K+8$

$x_{max}=\frac{-(6)}{-2}=3$ جزو دامنه نیست $\Rightarrow 2$

$\Rightarrow 3K+8\leq K-4$

$2K\leq -12$

$\boxed{K\leq -6}$ ✓

۲

۶ — ۲

$$f(x)=3x+|x| \xrightarrow[y\geq 0]{x\geq 0} y=4x \to x=\frac{y}{4} \to y=\frac{x}{4} \quad (x\geq 0,\ y\geq 0)$$

$$\xrightarrow[y<0]{x<0} y=2x \to x=\frac{y}{2} \to y=\frac{x}{2} \quad (x<0,\ y<0)$$

میانگین
$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}}{2}=\frac{3x}{8} \Rightarrow a=\frac{3}{8}$$

$$x<0 \Rightarrow \frac{3}{8}x-bx=\frac{x}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{8}$$

$$\to ab=\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\boxed{-\frac{3}{64}}$$

۷ — ۲

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m},\ (2,-10) \to \frac{6+4}{2+m}=-10 \Rightarrow 2+m=-1 \Rightarrow m=-3 \Rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

$$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x) \Rightarrow x+\frac{3x+4}{x-3}=y,\quad x\neq 3$$

$$x=y \to \cancel{x}+\frac{3x+4}{x-3}=\cancel{x} \to 3x+4=0$$

$$\boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

۸ — ۲

$$f(3-2x)=t \Rightarrow f^{-1}(t)=3-2x$$

$$2-g\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=2-t \Rightarrow g^{-1}(2-t)=\frac{x}{2} \to 2x=4g^{-1}(2-t)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(t)=3-\underline{2x} \Rightarrow f^{-1}(t)=3-4g^{-1}(2-t) \xrightarrow{t=-2} f^{-1}(-2)=3-4g^{-1}(\underbrace{2-(-2)}_{4})$$

$$\Rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=\cancel{4g^{-1}(4)}+3-\cancel{4g^{-1}(4)}=\boxed{3}$$

۹ — ۲

قرینه نسبت به مبدأ مختصات ⇐ x و y را قرینه می‌کنیم ⇐

$$y=\frac{5x-12}{1-x} \Rightarrow -y=\frac{-5x-12}{1+x} \Rightarrow y=\frac{5x+12}{x+1}$$

$$\xrightarrow[x-2]{\text{۲ واحد راست}} y=\frac{5(x-2)+12}{(x-2)+1} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=\frac{5(x-2)+12}{(x-2)+1}-3 \to y=\frac{5x+3-3x+3}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{2x+6}{x-1},\quad f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2} \to \frac{2(x+3)}{x-1}=\frac{x+6}{x-2},\quad x\neq 1,\ x\neq 2$$

$$\Rightarrow 2(x^2+x-6)=x^2+5x-6$$

$$2x^2+2x-12=x^2+5x-6 \Rightarrow x^2-3x-6=0 \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{1}=\boxed{3}$$

$$x\neq 1,2\ ✓$$

۱۰ — ۲

قرینه نسبت به $y=x$ ⇐ تابع وارون ⇐

$$y=x+4[x] \xrightarrow{\text{x و y را عوض}} x=y+4[y]$$

$$[x]=[y+4[y]] \Rightarrow [x]=[y]+4[y]$$

$$[x]=5[y] \Rightarrow [y]=\frac{[x]}{5} \Rightarrow 4[y]=\frac{4}{5}[x]$$

$$\Rightarrow x=y+\frac{4}{5}[x] \Rightarrow y=x-\frac{4}{5}[x]$$

$$f(x)=x+4[x],\quad g(x)=x-\frac{4}{5}[x] \to f(x)-g(x)=\cancel{x}+4[x]-\cancel{x}+\frac{4}{5}[x]=\boxed{\frac{24}{5}[x]}$$