/
A سمیرا یمینی - ۱۲ دختر

DATE / /

SUBJECT :

۱) الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1$ $\begin{cases} \text{if } (x_1, y_1) \in f(x) \\ \text{if } (x_2, y_2) \in f(x) \end{cases} , \text{ if } x_1 = x_2 \longrightarrow y_1 = y_2$

$\begin{cases} x_1 = x_2 \to 2x_1 = 2x_2 \to 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ x_1 = x_2 \to x_1^2 = x_2^2 \to 2x_1^2 = 2x_2^2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x_1 - 1 + 2x_1^2 = 2x_2 - 1 + 2x_2^2 \to y_1^3 = y_2^3$

$\to y_1 = y_2$

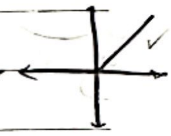
تابع هست ✓

ب) $x \cos y = y \cos x$

$x = \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \cos y = 0 \to \cos y = 0 \to y = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

✗ تابع نیست چون به‌ازای یک مقدار از x، چندین مقدار y دارد.

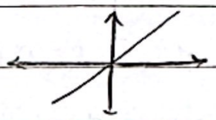
ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \quad x, y \geq 0 \to x + y - 2\sqrt{xy} = 0 \to (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 =$

$\to \sqrt{x} = \sqrt{y} \longrightarrow (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2 \to x = y \quad \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{pmatrix} \to$ 

تابع هست ✓

د) $xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0$

$y^2(x - y) + 2(x - y) = 0 \to (x - y)(\underbrace{y^2 + 2}_{\text{همواره نامنفی}}) = 0$

$\to x = y \to$  تابع هست ✓

---

۲) تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & ; |x - 1| \geq 2 \\ a + 2x & ; -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$ مفروض است. حاصل $a + b$ چیست؟

$\to f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & \begin{cases} x - 1 \geq 2 \to x \geq 3 \\ x - 1 \leq -2 \to x \leq -1 \end{cases} \\ a + 2x & -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$

چون $f(x)$ تابع است، نشان داده به‌ازای هر عضو از دامنه، تنها یک عضو از برد از آن خارج شود، پس داریم:

$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 2 - b \\ f(-1) &= -2 + a \end{aligned} \right\} \longrightarrow 2 - b = -2 + a$

$\boxed{4 = a + b}$

۳) دامنهٔ $f(x)=\sqrt{a-bx-x^2}$ بازهٔ $[b,a]$ است. حاصل $a+b$ چند است؟ $(a\neq 0,\ b\in \mathbb{Z})$

(زیر رادیکال ≥ 0) است $\xrightarrow{\text{چون}}$ a و b ریشه‌های معادله‌اند $\xrightarrow{\text{پس}}$ اگر دامنه بازهٔ $[b,a]$ است

جواب حقیقی خارج این حدود ندارد.

$f(a)=0 \rightarrow a-ba-a^2=0$

$f(b)=0 \rightarrow a-b^2-b^2=0 \rightarrow 2b^2=a$ $\Big\}\ 2b^2-ba-a^2=0$

$b^2+b^2-ba-a^2=0 \rightarrow b(b-a)+(b-a)(b+a)=0$

$(b-a)(2b+a)=0$ ↗ $b=a \rightarrow \times \xrightarrow{\text{چون}} ([b,a]\ ;\ a>b)$

↘ $2b+a=0 \rightarrow a=-2b$

$f(x)=\sqrt{a-bx-x^2} \xrightarrow{a=-2b} \sqrt{-2b-bx-x^2}$

$\begin{cases} x_1=a=-2b \\ x_2=b \end{cases}$ $\quad P=x_1x_2=-2b=(-2b)(b) \rightarrow b=-1$

$\rightarrow a=+2$

$\boxed{a+b=+1}$

۴) دامنهٔ تابع $y=\dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ برابر بازهٔ $(-\infty,2)$ است. حاصل $3a+c-3|b|$ برحسب b کدام است؟

$ax^2+bx+c>0 \xrightarrow{D_f=(-\infty,2)}$ پس عبارت زیر رادیکال معادلهٔ خط با شیب $-$ بوده است $\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b<0 \end{cases}$

$bx+c>0 \quad \dfrac{\text{ریشه}=2}{+\ \ \vert\ \ -} \rightarrow 2b+c=0 \rightarrow c=-2b$

$3a+c-3|b|=-2b+3b=\boxed{b}$

۵) دامنه بیابید.

$f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{|x|-[x]}}$ $\quad |x|-[x]\neq 0 \longrightarrow$

$x\ge 0$: $x-[x]\neq 0 \rightarrow x\neq[x] \rightarrow x\notin\mathbb{Z}$ (I)

$x<0$: $x+[x]\neq 0$

x و $[x]$ همیشه هم علامت اند

فقط زمانی حاصل صفر می‌شود،

که هر ۲ عبارت باید صفر شوند

$x=0$

$[x]=0 \rightarrow 0\le x<1$ $\Big\} \xrightarrow{\cap} x\neq 0$ (II)

$D_f: (I)\cup(II): \boxed{x\notin\mathbb{Z}}$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$ $\quad$ (I) $x\ge 0, y\ge 0$

$\sqrt{y}=9-\sqrt{x} \longrightarrow 9-\sqrt{x}\ge 0 \rightarrow$

$9\ge\sqrt{x} \xrightarrow{\text{یعنی}} 0\le\sqrt{x}\le 9 \xrightarrow[2]{\text{به توان}}$

$0\le x\le 81$ (II)

$D_f: (I)\cap(II): \boxed{0\le x\le 81}$

۴) دامنه بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}}$

$3x-1>0 \rightarrow x>\frac{1}{3}$

$x>0$

$x\neq 1$ $\Bigg\} \xrightarrow{\cap} x>\frac{1}{3}-\{1\}$ ★

$\log_x^{3x-1}\ge 0$

$\frac{1}{3}<x<1$: $3x-1\le 1 \rightarrow x\le\frac{2}{3} \xrightarrow[\cap\, \frac{1}{3}<x<1]{\cap ★} \frac{1}{3}<x\le\frac{2}{3}$

$x>1$: $3x-1\ge 1 \rightarrow x\ge\frac{2}{3} \xrightarrow[\cap\, x>1]{\cap ★} x>1$

$\cup$

$D_f: x\in(\frac{1}{3},+\infty)-(\frac{2}{3},1]$

ب) $f(x) = \log \dfrac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|} \geq 0 \rightarrow 6+\sqrt{|x|}-|x| > 0$

$\sqrt{|x|}=t \longrightarrow -t^2+t+6 > 0 \longrightarrow$

$t^2-t-6<0 \rightarrow (t-3)(t+2)<0$

	-2		3	
$+$		$-$		$+$

$\rightarrow -2<t<3 \rightarrow -2<\sqrt{|x|}<3 \xrightarrow{\text{بدیهی}} 0<\sqrt{|x|}<3$

$\xrightarrow[2]{\text{توان}} 0<|x|<9 \rightarrow 0<x<9 \rightarrow x \in (-9,9)-\{0\}$

$-9<x<0$

---

۷) دامنه تابع $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x+b}+a}$ بازه $(2,+\infty)$ باشد. مقدار کدام است؟

$\dfrac{3x+2}{x+b}+a \geq 0 \rightarrow \dfrac{3x+2+ax+ba}{x+b} \geq 0 \rightarrow \dfrac{x(3+a)+2+ba}{x+b} \geq 0$

ریشه صورت : $x=\dfrac{-2-ba}{3+a}$

ریشه مخرج : $x=-b$

اگر $a=-3$ آنگاه صورت ریشه ای ندارد و تنها ریشه مخرج است پس در جدول تعیین علامت مورد توجه واقع می شود ریشه مخرج است:

$x+b=0 \rightarrow x=-b=2$

$\rightarrow \boxed{b=-2}$

---

۸) دامنه $y=\sqrt{f(x)-x+1}$ کدام است اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & [x] \geq 4 \\ 4x+3 & [x] < 4 \end{cases}$ ؟

$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x \geq 5 \\ 4x+3 & x<5 \end{cases} \longrightarrow y=\begin{cases} \sqrt{2x-1-x+1} \\ \sqrt{4x+3-x+1} \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \cap x \geq 5 \\ \sqrt{3x+4} & x \geq -\frac{4}{3} \cap x<5 \end{cases} \rightarrow y=\begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 5 \\ \sqrt{3x+4} & -\frac{4}{3} \leq x < 5 \end{cases}$

$\left(D_{f(x)} = [-\frac{4}{3}, +\infty) \right)$

۹) تابع $\dfrac{24x^3+36x^2+18x+3}{(4x^2+4x+1)^2}$ را ساده کنید و دامنه آن را بیابید.

دامنه تابع بالا: $(4x^2+4x+1)^2 \neq 0 \to (2x+1)^4 \neq 0 \to \mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$

$$\frac{3(8x^3+12x^2+6x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1}$$

$2x+1$

دامنه در این حالت هم $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$

---

۱۰) اگر دامنه $y=\sqrt{1-\log(2x-a)}$ به صورت $(b,c]$ باشد، $c-b$ کدام است؟

$2x-a>0 \to x>\frac{a}{2}$

$1-\log(2x-a)\geq 0 \to 1 \geq \log_{10}(2x-a) \to 10 \geq 2x-a$

$\frac{10+a}{2} \geq x$

$x \in (\underbrace{\frac{a}{2}}_{b}, \underbrace{5+\frac{a}{2}}_{c}]$ $\qquad c-b = 5+\frac{a}{2}-\frac{a}{2} = \boxed{5}$