نام و نام خانوادگی: آرتین شیروانی فر — پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۲۳ — کلاس دهم سپهر اینر B

۱

$S(h,k) \to y=a(x-h)^2+k \xrightarrow{A(-1,9)}$

$y=a(x-(-1))^2+9 \longrightarrow y=a(x+1)^2+9$

$\xrightarrow{B(3,1)} 1=a(3+1)^2+9$

$\to 1=16a+9 \to a=-\frac{1}{2} \to y=-\frac{1}{2}\overbrace{(x+1)^2}^{-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}+9$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{17}{2}$

۲

$\underset{a}{2x^2}+\underset{b}{mx}+\underset{c}{m+6}=0 \longrightarrow$ دارای ۲ ریشه‌ی مثبت

$\Delta>0 \to m^2-4(2)(m+6)>0 \to (m-12)(m+4)>0$, $\quad m^2-8m-48 \quad \to m<-4$ ① , $m>12$

$S>0 \to -\frac{b}{a}>0 \to -\frac{m}{2}>0 \to m<0$ ②

$P>0 \to \frac{c}{a}>0 \to \frac{m+6}{2}>0 \to m>-6$ ③

$1 \cap 2 \cap 3$: $-6<m<-4$

۳

معادله‌ی $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای ۲ ریشه‌ی حقیقی

$\Delta=4m^2-4m+1+12m-24=4m^2+8m-23$

$P=\frac{2-m}{3}$

$S=-\frac{2m-1}{3}=\frac{1-2m}{3}$

$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta} \Longrightarrow S=\frac{1}{P}$

$\frac{1-2m}{3}=\frac{3}{2-m} \to (2-m)(1-2m)=9$

$2m^2-5m+2=9$

$2m^2-5m-7=0$

$(2m-7)(m+1)=0 \to m=-1$ ✗ , $m=\frac{7}{2}$ ✓ → جواب

$\Delta>0$: $m=\frac{7}{2} \to \Delta>0$ ✓ ; $m=-1 \to \Delta<0$ ✗

۴

$x=x^2-4 \to x^2-x-4=0 \to x_1+x_2=1$, $x_1 \cdot x_2=-4$

$x^2=x+4 \to x^3=x(x^2)=x(x+4)=x^2+4x=x+4+4x=5x+4$

$y_1=x_1^3+\frac{1}{x_2} \to x_1^3=5x_1+4 \to y_1=5x_1+4+\frac{1}{x_2}$

$y_2=x_2^3+\frac{1}{x_1} \to x_2^3=5x_2+4 \to y_2=5x_2+4+\frac{1}{x_1}$

$y_1+y_2=5(x_1+x_2)+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+8 \longrightarrow y_1+y_2=5+8-\frac{1}{4}=\frac{51}{4}$, $\quad \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}=-\frac{1}{4}$

$y_1 \cdot y_2=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=x_1^3x_2^3+\frac{x_1^3}{x_1}+\frac{x_2^3}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2} \xRightarrow{x_1^2+x_2^2=9} y_1 \cdot y_2=-\frac{221}{4}$

معادله‌ی ساخته شده: $x^2-(y_1+y_2)x+y_1y_2=0 \to 4x^2-51x-221=0$

۵

$t=\sqrt[3]{x}$

$\to (t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=t^3-\frac{1}{t^3} \longrightarrow t^3-\frac{1}{t^3}=2t$

$\times t^3$: $t^6-1=2t^3 \to t^6-2t^3-1=0$

$S=-\frac{-2}{1}=2$

$3x^2 - ax + 4 = 0 \longrightarrow$ یک ریشه ۳ برابر ریشه‌ی دیگر $\longrightarrow \alpha = 3\beta \begin{cases} \cancel{\alpha}^{4\beta}+\beta = \frac{a}{3} \\ \alpha\beta = \frac{4}{3} \end{cases}$ ۶

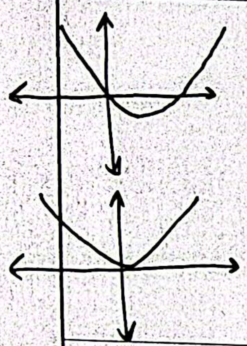
$\beta^2 = \frac{4}{9}$

$\alpha+\beta = \frac{8}{3} \leftarrow \alpha = 2 \leftarrow \beta = \frac{2}{3}$

$\alpha+\beta = -\frac{8}{3} \leftarrow \alpha = -2 \leftarrow \beta = -\frac{2}{3}$

$a = 3(\alpha+\beta) = \pm 8$

$\left.\begin{matrix} a_1 = 8 \\ a_2 = -8 \end{matrix}\right\} \to$ اختلاف ۲ ریشه: 16



به ازای چند مقدار a سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه‌ی ۳ نگذرد ۷

سهمی رو به بالا باید باشد $\longrightarrow a > 0$ / $\alpha, \beta \geqslant 0$ ریشه‌های غیر منفی

$\frac{-3+2a}{a} \geqslant 0$

$\frac{3+2a}{a} \leqslant 0$

$-\frac{3}{2} \leqslant a < 0$

a		$-\frac{3}{2}$		0	
علامت	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

به ازای هیچ مقدار a

محور تقارن سهمی‌های $y_1 = x^2 + ax - 2$ و $y_2 = -x^2 - 2x + b$ یکسان $\longrightarrow$ ۸

$x_1 = -\frac{a}{2}$

$x_2 = -\frac{-2}{-2} = -1$

$x_1 = x_2 \longrightarrow -\frac{a}{2} = -1 \to a = 2$

$y = x^2 + ax - 2 \xrightarrow{y=1} x^2 + 2x - 2 = 1$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0 \to x = 1, \quad x = -3$

$y = -x^2 - 2x + b$

$1 = -(1)^2 - 2(1) + b \to b = 4$

$ab = 2 \times 4 = 8$

ریشه‌ها α و β

$\left.\begin{matrix} 2x^2 - ax + b = 0 \to \\ 2ax^2 + ax - 6 = 0 \to \end{matrix}\right\} \to \alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \to \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \to a = 1$ ۹

ریشه‌های α' و β'

$S_1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ / $S_2 = -\frac{1}{2}$

$P_1 = \frac{b}{2}$ / $P_2 = -\frac{3}{a} = -3$

$(\alpha + \frac{1}{2})(\beta + \frac{1}{2}) = P_2 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{4}$

$\frac{b}{2} = -3 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = -3 \cancel{-0.25} \cancel{+0.25} = -3 \to b = -6$

$\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{1\times(-6)}{4}\right] = [-1.5] = -2$

$\left.\begin{matrix} y_1 = x^2 + 6x + m = 0 \\ y_2 = x^2 + 2x - 3m = 0 \end{matrix}\right\}$ یک ریشه‌ی مشترک غیر صفر دارند: $\longrightarrow$ ریشه‌ی مشترک $= \alpha$

$\cancel{x^2} + 6x + m = \cancel{x^2} + 2x - 3m$

$4x + 4m = 0 \to x = -m \to \alpha = -m$

$(-m)^2 + 6(-m) + m = 0 \to m^2 - 5m = 0 \to m = 0$ ✗

$\to m = 5$ ✓

$y_1 = x^2 + 6x + 5 = 0 \to x = -1, \quad x = -5$

$y_2 = x^2 + 2x - 15 = 0 \to x = -5, \quad x = 3$

ریشه‌های غیر مشترک: ۳ و ۱- $\longrightarrow$ اختلاف: $3 - (-1) = 4$