

۱ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲ - درس ۱)
با استفاده از قضیه سینوس ها داریم:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ$$

$$\Rightarrow A = 105^\circ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{2} \times \sin 105^\circ = \frac{25\sqrt{2}}{2} \times \sin 105^\circ$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$S = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{8} = \frac{50 + 50\sqrt{3}}{8} = \frac{25}{4}(1 + \sqrt{3})$$

کد سؤال: ۴۴۷۶۲۷

۲ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * ریاضی ۱ (فصل ۲ - درس ۳)

نکته: اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد، آنگاه $x = \cos \alpha$ و $y = \sin \alpha$. در نتیجه $x^2 + y^2 = 1$

نکته: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

مطابق نکته، برای نقطه P می توان نوشت:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$

نقطه P در ربع چهارم قرار دارد، پس y مقداری منفی است:

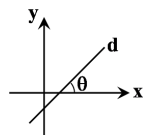
$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

کد سؤال: ۲۹۷۲۸۰

۳ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * ریاضی ۱ (فصل ۲ - درس ۲)

نکته ۱: شیب یک خط برابر تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



$m = \tan \theta$: شیب خط d

نکته ۲: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

مطابق نکته ۱، شیب خط مورد نظر برابر $m = \tan 45^\circ = 1$ است. از طرفی خط از نقطه $A(3, 2)$

عبور می کند، پس مطابق نکته ۲ معادله آن عبارت است از:

$$y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$$

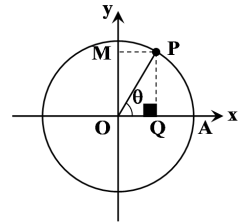
برای یافتن محل تلاقی با محور y ها، کافیت در معادله مقدار $x = 0$ را قرار دهیم:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1$$

کد سؤال: ۳۲۳۷۷۱

۴ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: استدلال * ریاضی (فصل ۲ ◀ درس ۲)

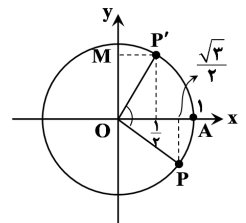


نکته: اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد و θ زاویه ای که نیم خط OP با محور Ox می سازد، اگر از نقطه P خطی بر محور Ox عمود کنیم و آن را Q بنامیم و اگر از نقطه P خطی بر محور Oy عمود کنیم و آن را M بنامیم داریم:

$$\cos \theta = x_P = OQ, \quad -1 \leq x_P \leq 1$$

$$\sin \theta = y_P = OM, \quad -1 \leq y_P \leq 1$$

اگر $\alpha = -30^\circ$ باشد، در ناحیه چهارم قرار می گیرد و مقدار کسینوس α برابر با طول نقطه P که همان $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است می باشد. با نزدیک شدن به نقطه A طول نقاط زیاد می شود و در نقطه A که همان زاویه صفر درجه است مقدار کسینوس α برابر طول نقطه A یعنی ۱ می باشد.



با نزدیک شدن به نقطه P' طول نقاط کاهش می یابد و در نقطه P' که همان زاویه 60° است مقدار کسینوس α که طول نقطه P' است برابر $\frac{1}{2}$ خواهد شد، بنابراین مقدار $\cos \alpha$ در کمترین حالت $\frac{1}{2}$ و در بیشترین حالت ۱ می باشد:

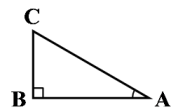
$$\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$$

پس فقط یک مقدار صحیح $m = 0$ می تواند باشد.

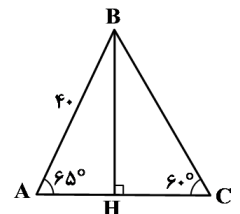
کد سؤال: ۵۳۲۰۸۵

۵ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی (فصل ۲ ◀ درس ۱)



نکته: در مثلث قائم الزاویه روبرو، سینوس زاویه A برابر است با: $\sin A = \frac{BC}{AC}$



با توجه به شکل روبرو داریم:

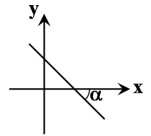
$$\triangle ABH : \sin 65^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{40} = \sin 65^\circ \Rightarrow BH = 36$$

$$\triangle BCH : \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{36}{BC} = \sin 60^\circ \Rightarrow BC = \frac{36}{\sin 60^\circ} = \frac{36}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{72}{\sqrt{3}} = 24\sqrt{3}$$

کد سؤال: ۳۹۷۵۱۲

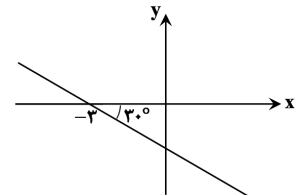
۶ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * ریاضی (فصل ۲ ◀ درس ۲)



نکته، اگر خطی مطابق شکل، شیب منفی داشته باشد، مقدار شیب آن برابر است با:

$$m = -\tan \alpha$$

نکته: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

با توجه به نمودار خط و با استفاده از نکته بالا شیب خط برابر است با:

$$m = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

این خط از نقطه $(-3, 0)$ می گذرد، پس معادله آن عبارت است از:

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-3)) \Rightarrow 3y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} \Rightarrow 3y + \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} = 0$$

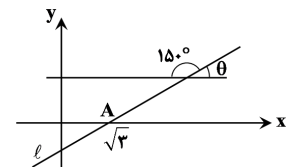
کد سؤال: ۳۲۳۸۱۸

۷ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * ریاضی (فصل ۲ ◀ درس ۲)

نکته: شیب یک خط برابر تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.نکته: فرم کلی معادله خط با شیب m به صورت $y = mx + b$ است.

ابتدا شیب خط را به دست می آوریم:



$$\theta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow \text{شیب خط } m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال معادله خط گذرا از نقطه $A(\sqrt{3}, 0)$ با شیب $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ را می نویسیم:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{\text{از نقطه } (\sqrt{3}, 0) \text{ می گذرد}} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}) + b \Rightarrow b = -1$$

$$\text{معادله خط } \ell: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$$

کد سؤال: ۳۲۳۷۴۹

۸ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۳)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{نکته}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{نکته}$$

عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$A = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \cdot \left(\sin x - \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \times \left(\frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} \right) = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{-\cos^2 x}{\sin x}$$

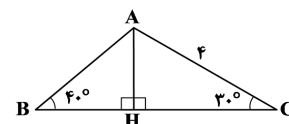
$$\frac{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{\cos x < 0} \rightarrow A = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{-\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{-\cos^2 x}{\sin x} \Rightarrow A = \cos^2 x$$

کد سؤال: ۶۳۳۷۴۷

۹ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۱)

نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.
ابتدا ارتفاع AH را رسم می کنیم. می توان نوشت:



$$\hat{AHC} : \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2$$

$$\hat{ABH} : \sin 40^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow 0.6 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{0.6} = \frac{10}{3}$$

زاویه A برابر ۱۱۰° است، پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 4 \times \sin 110^\circ = \frac{20}{3} \times \frac{9}{10} = 6$$

کد سؤال: ۴۱۸۱۰۶

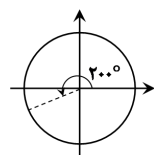
۱۰ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * ریاضی ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۳)

می دانیم: $|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$ پس می توان نوشت:

$$\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} - \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} - \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x|$$



$$\sin 200^\circ > \cos 200^\circ \Rightarrow \sin 200^\circ - \cos 200^\circ > 0 \Rightarrow |\sin 200^\circ - \cos 200^\circ| = \sin 200^\circ - \cos 200^\circ \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sin 200^\circ < 0 \\ \cos 200^\circ < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 200^\circ + \cos 200^\circ < 0 \Rightarrow |\sin 200^\circ + \cos 200^\circ| = -(\sin 200^\circ + \cos 200^\circ) \quad (2)$$

بنابراین:

$$A = (\sin 200^\circ - \cos 200^\circ) - [-(\sin 200^\circ + \cos 200^\circ)] = 2 \sin 200^\circ$$

کد سؤال: ۲۸۹۳۱۶

۱۱ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * ریاضی ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۳)

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

$$\text{نکته: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

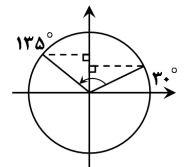
$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)}} &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{\cos^2 x \sin^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} \\ &= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| \stackrel{0^\circ \leq x \leq 45^\circ}{=} \sin x + \cos x \end{aligned}$$

کد سؤال: ۳۲۳۷۵۶

۱۲ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * ریاضی ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۲)

وقتی زاویه θ بین 30° تا 135° باشد، از 90° نیز عبور می کند، پس بیشترین مقدار $\sin \theta$ برابر ۱ می شود. از طرفی از روی شکل مشخص است که $\sin 30^\circ$ از $\sin 135^\circ$ کمتر است؛ پس کمترین مقدار $\sin \theta$ به ازای $135^\circ > \theta > 30^\circ$ از مقدار $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ بزرگ تر است. در نتیجه خواهیم داشت:



$$\frac{1}{2} < \sin \theta \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3m-2}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3m-2}{4} \leq 1 \Rightarrow 3m-2 \leq 4 \Rightarrow 3m \leq 6 \Rightarrow m \leq 2 \\ \frac{1}{2} < \frac{3m-2}{4} \Rightarrow 2 < 3m-2 \Rightarrow 4 < 3m \Rightarrow \frac{4}{3} < m \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < m \leq 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

کد سؤال: ۲۸۹۰۲۴