①  تمرینی روش

$a_n = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \ldots$

$q = ۲$ $\quad \boxed{a_n = \frac{۱}{۲} \times q^{n-1}} \to \boxed{a_n = \frac{۱}{۲} \times ۲^{n-1}}$

الف) $a_{۱۰}$ ؟ $\frac{۱}{۲} \times ۲^۹ = ۲۵۶$

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}}$ ؟ $\frac{a_{۱۳} q^۴}{a_{۱۳}} = q^۴ \to \boxed{۱۶}$

ج) واسطه هندسی بین $t_۴$ و $t_{۱۰}$ ؟

د) $a_n = ۱۲۸ \to n = ? \to n = ۹$

$t_۴ = ۴ \quad t_{۱۰} = ۲۵۶$

$t_۴ = ۲^۲ \quad t_{۱۰} = ۲^۸ \longrightarrow$ واسطه $= ۲^۵$

$\frac{۱}{۲} \times ۲^{n-1} = ۱۲۸ \to ۲^{n-1} = ۲۵۶ \to n-1 = ۸$

$n = ۹$

---

②

$t_۵ = ۱۲ \quad t_۸ = ۹۶ \quad t_{۱۰} = ? \longrightarrow t_۸ \times q^۲$

$\boxed{۹۶ \times ۴ = ۳۸۴}$

$\frac{t_۸}{t_۵} = q^۳ \longrightarrow \frac{۹۶}{۱۲} = ۸ \to q^۳ = ۸$

$\boxed{q = ۲}$

---

③

الف) $a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = ۲۴۳$

$\frac{a_۳}{q^۲} \times \frac{a_۳}{q} \times a_۳ \times a_۳ q \times a_۳ q^۲ = ۲۴۳$

$(a_۳)^۵ = ۲۴۳$

$\boxed{a_۳ = ۳}$

ب) $a_۱ \times a_۵ = a_۳ \times a_۳$

$a_۱ \times a_۵ = ۳ \times ۳$

$\boxed{a_۱ \times a_۵ = ۹}$

---

④

[illegible] $\longrightarrow \frac{۲^a}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲^b} \longrightarrow ۲^{a+b} = ۳۲$

$a + b = ۵$

$\boxed{\frac{a+b}{۲} = ۲٫۵}$

---

⑤

$\underbrace{t_۳, t_۷}_{\times q^۴}, \underbrace{t_۷, t_{۱۱}}_{\times q^۴} \longrightarrow \frac{۱-x}{x} = \frac{x}{۱+x}$

$۱ - x^۲ = x^۲ \longrightarrow \frac{۱}{۲} = x^۲ \longrightarrow x = \boxed{\pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

به ازای $x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، $\frac{a_{۱۱}}{a_۷} = q^۴$ عددی منفی می‌شود

$a_1 + a_1q^۳ = ۲۸ \to a_1(1+q^۳) = ۲۸$ ، $a_1q + a_1q^۲ = ۱۲ \to a_1q(1+q)$ ⑥

$$\frac{a_1(1+q^۳)}{a_1q(1+q)} = \frac{۲۸}{۱۲} \to \frac{\cancel{(1+q)}(1-q+q^۲)}{q\cancel{(1+q)}} = \frac{۷}{۳}$$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \to ۱۰۰ - ۳۶$

$$۳ - ۳q + ۳q^۲ = ۷q \to ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = 0 \to q = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶}$$

غ.ق.ق

$q = ۳ \to ۱, ۳, ۹, \boxed{۲۷}$

---

⑦

$t_1 + t_2 + t_3 = ۱۳$ $\quad t_1 \times t_2 \times t_3 = ۲۷$

$\frac{t_2}{q} \times t_2 \times t_2q = ۲۷$

$(t_2)^۳ = ۲۷$

$\boxed{t_2 = ۳}$

$\frac{۳}{q} + ۳ + ۳q = ۱۳$

$$۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = 0 \to q = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶} \begin{cases} q = ۳ \to ۱, ۳, ۹, \dots \\ q = \frac{1}{۳} \to ۹, ۳, ۱, \dots \end{cases}$$

---

⑧

$$q = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \to S_{۱۰} = \frac{\cancel{۲}(۳^{۱۰}-1)}{\cancel{(۳-1)}} = ۳^{۱۰} - 1 = \boxed{۵۹۰۴۸}$$

$$P_{۱۰} = (۲ \times (۲ \times ۳^۹))^{\frac{۱۰}{۲}} = (۲^۲ \times ۳^۹)^۵ = \boxed{۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵}}$$

---

⑨

$a_1 \qquad aq \qquad aq^۲ \qquad aq^۳$

$$\left.\begin{aligned} aq - a &= a(q-1) \\ aq^۲ - aq &= aq(q-1) \\ aq^۳ - aq^۲ &= aq^۲(q-1) \\ aq^۴ - aq^۳ &= aq^۳(q-1) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} (۱) & (۲) & (۳) & (۴) \\ a(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & aq(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & aq^۲(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & aq^۳(q-1) \end{tikzcd}$$

---

۱۰) الف) $a_1 + a_1 + d + a_1 + ۲d + \dots + a_1 + (n-1)d$ ، تعداد $d$ ها $= \frac{n(n-1)}{۲} \to na + \frac{n(n-1)}{۲}$

$d \to \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d)$

---

۱۰) ب) $S_n = a_1 + aq + aq^۲ + \dots + aq^{n-1} \xrightarrow{\times q} qS_n = aq + aq^۲ + \dots aq^n \to qS_n - S_n \to$

$(q-1)S_n = aq^n - a = a(q^n - 1) \to S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$

وقتی $q \neq 1$ باشد