(مهدی روش) ۲۰

①

الف) $a_{۱۰}$ ؟ $\frac{1}{۲}\times ۲^{۹} = ۲۵۶$ ✓

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}}$ ؟ $\frac{a_{۱۳}\, q^{۴}}{a_{۱۳}} = q^{۴}$ ← $\boxed{۱۶}$ ✓

ج) واسطه هندسی بین $t_{۴}$ و $t_{۱۰}$ ؟

د) $a_n = ۱۲۸$ ← $n = ?$ ← $n = ۹$ ✓

$a_n = \frac{1}{۲}, ۱, ۲, \ldots$

$q = ۲$ $\boxed{a_n = \frac{1}{۲}\times q^{n-1}} \longrightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{۲}\times ۲^{n-1}}$

(۲)

$t_{۴} = ۴$ $t_{۱۰} = ۲۵۶$

$t_{۴} = ۲^{۲}$ $t_{۱۰} = ۲^{۸} \longrightarrow$ واسطه $= ۲^{۵}$ ✓

$\frac{1}{۲}\times ۲^{n-1} = ۱۲۸ \to ۲^{n-1} = ۲۵۶ \to n-1 = ۸$

$n = ۹$

---

②

$t_{۵} = ۱۲$ $t_{۸} = ۹۶$ $t_{۱۰} = ? \longrightarrow t_{۸}\times q^{۲}$

$\boxed{۹۶\times ۴ = ۳۸۴}$ ✓

$\frac{t_{۸}}{t_{۵}} = q^{۳} \longrightarrow \frac{۹۶}{۱۲} = ۸ \to q^{۳} = ۸$

$\boxed{q = ۲}$

(۲)

---

③

الف) $a_{۱}\times a_{۲}\times a_{۳}\times a_{۴}\times a_{۵} = ۲۴۳$

$\frac{a_{۳}}{q^{۲}}\times\frac{a_{۳}}{q}\times a_{۳}\times a_{۳}q\times a_{۳}q^{۲} = ۲۴۳$

$(a_{۳})^{۵} = ۲۴۳$

$\boxed{a_{۳} = ۳}$ ✓

ب) $a_{۱}\times a_{۵} = a_{۳}\times a_{۳}$

$a_{۱}\times a_{۵} = ۳\times ۳$

$\boxed{a_{۱}\times a_{۵} = ۹}$ ✓

(۲)

---

④

[illegible] $\longrightarrow \frac{۲^{a}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۲^{b}} \longrightarrow ۲^{a+b} = ۳۲$

$a+b = ۵$

$\frac{a+b}{۲} = \boxed{۲٫۵}$ ✓

(۲)

---

⑤

$\underbrace{t_{۳}, t_{۷}}_{\times q^{۴}}, \underbrace{t_{۷}, t_{۱۱}}_{\times q^{۴}} \longrightarrow \frac{1-x}{x} = \frac{x}{1+x}$

$1 - x^{۲} = x^{۲} \longrightarrow \frac{1}{۲} = x^{۲} \longrightarrow x = \boxed{\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$ ✓

به ازای $x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\frac{a_{۱۱}}{a_{۷}} = q^{۴}$ عددی منفی می‌شود

(۲)

⑥ $a_1 + a_1q^۳ = ۲۸ \to a_1(1+q^۳) = ۲۸$, $a_1q + a_1q^۲ = ۱۲ \to a_1q(1+q)$

$$\frac{a_1(1+q^۳)}{a_1q(1+q)} = \frac{۲۸}{۱۲} \to \frac{\cancel{(1+q)}(1-q+q^۲)}{q\cancel{(1+q)}} = \frac{۷}{۳}$$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \to ۱۰۰ - ۳۶$

$۳ - ۳q + ۳q^۲ = ۷q \to ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = ۰ \to q = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶}$

$q = ۳ \to ۱, ۳, ۹, \boxed{۲۷}$ ✓ [illegible]

۲

---

⑦ $t_1 + t_2 + t_3 = ۱۳$ $t_1 \times t_2 \times t_3 = ۲۷$

$\frac{t_2}{q} \times t_2 \times t_2q = ۲۷$

$(t_2)^۳ = ۲۷$

$\boxed{t_2 = ۳}$

۲

$\frac{۳}{q} + ۳ + ۳q = ۱۳$

$۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = ۰ \to q = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶}$ ✓ $\begin{cases} q = ۳ \to ۱, ۳, ۹, \dots \\ q = \frac{1}{۳} , ۹, ۳, ۱, \dots \end{cases}$

---

⑧ $q = \frac{۱۸}{۶} = ۳ \to S_{۱۰} = \frac{\cancel{۲}(۳^{۱۰} - ۱)}{\cancel{(۳-۱)}} = ۳^{۱۰} - ۱ = \boxed{۵۹۰۴۸}$ ✓

$P_{۱۰} = (۲ \times (۲ \times ۳^۹))^{\frac{۱۰}{۲}} = (۲^۲ \times ۳^۹)^۵ = \boxed{۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵}}$ ✓

۲

---

⑨ a_1 aq $aq^۲$ $aq^۳$

$$\left.\begin{aligned} aq - a &= a(q-1) \\ aq^۲ - aq &= aq(q-1) \\ aq^۳ - aq^۲ &= aq^۲(q-1) \\ aq^۴ - aq^۳ &= aq^۳(q-1) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} \text{(۱)}\ a(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & \text{(۲)}\ aq(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & \text{(۳)}\ aq^۲(q-1) \arrow[r, bend right, "\times q"'] & \text{(۴)}\ aq^۳(q-1) \end{tikzcd}$$

✓ ۲

---

۱۰) الف) $a_1 + a_1 + d + a_1 + ۲d + \dots + a_1 + (n-1)d$, $\overset{\text{تعداد}}{d}$ ها $= \frac{n(n-1)}{۲} \to na + \frac{n(n-1)}{۲}$ ✓

$d \to \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d)$

---

۱۰) ب) $S_n = a_1 + aq + aq^۲ + \dots + aq^{n-1} \xrightarrow{\times q} qS_n = aq + aq^۲ + \dots aq^n \to qS_n - S_n \to$

$(q-1)S_n = aq^n - a = a(q^n - 1) \to S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ ✓ اگر $q \neq ۱$ باشد

۲