به نام خدا

بهنیا منعمیان — پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۸ کلاس دهم سپهر A

1

الف) $f(x)=\sqrt{|x|x}$ — $D_f=[0,+\infty)$

$g(x)=x \longrightarrow D_g=\mathbb{R}$

دامنه‌های نابرابر ← مساوی نیستند.

ب) $f(x)=\dfrac{(x+3)(x+1)x+4}{x^2+5x+7}=\dfrac{x^3+4x^2+3x+x+4}{x^2+5x+7}=1$ — $D_f=\mathbb{R}$

x^2+5x+7: دلتای منفی ← ریشه ندارد

$g(x)=1$ — $D_g=\mathbb{R}$

دامنه برابر و ضابطه برابر ← مساوی هستند.

ج) $f(x)=\dfrac{4\sin^2 x-6\sin x}{2\sin x-3}=\dfrac{2\sin x(2\sin x-3)}{2\sin x-3}=2\sin x$ — $g(x)=2\sin x$

$2\sin x\neq 3 \to \sin x\neq\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} -1\leq\sin x\leq 1 \longrightarrow$ پس مخرج برای هیچ عددی صفر نمی‌شود / ریشه ندارد

$D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$

دامنه برابر و ضابطه برابر ← مساوی اند.

د) $f(x)=\dfrac{x}{|x|} \Longrightarrow$ رسم شکل — $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$g(x)=\dfrac{|x|}{x} \Longrightarrow$ — $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

دامنه، ضابطه و شکل برابر ← مساوی اند.

2

الف) $g(x)=[\underbrace{x-[x]}_{\text{همواره در بازه } [0,1)}]$ همواره مساوی صفر

$f(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right]$ — مخرج ریشه ندارد، همواره در بازه $[0,1)$ $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$

دامنه و ضابطه برابر ← مساوی اند

ب) $f(x)=\dfrac{1}{[2x]}$ — $[2x]\neq 0$, $x\neq[0,\frac{1}{2})$

$g(x)=\dfrac{1}{2[x]}$ — $[x]\neq 0$, $x\neq[0,1)$

$D_f=\mathbb{R}-[0,\frac{1}{2})$, $D_g=\mathbb{R}-[0,1)$

دامنه‌های نابرابر ← نامساوی اند

ج) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ — $x-|x|>0$ هیچ گاه اتفاق نمی‌افتد

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ — $|x|-x>0$ — $D_g=\mathbb{R}^-$

$D_f=\phi$, $D_g=\mathbb{R}^-$

دامنه نابرابر ← نامساوی اند

د) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x-1} & ; x\neq 1\\ 2 & ; x=1\end{cases}$

$\dfrac{x^3-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=x^2+x$ — $x-1$: ریشه مخرج 1 ← اما در دامنه نیست

$g(x)=x^2+x$

دامنه برابر و ضابطه برابر ← مساوی اند

3

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=x^2+x+1\\ f(x)-g(x)=x^2-x+1\end{cases}$$

$2f(x)=2x^2+2$

$\boxed{f(x)=x^2+1}$

$\cancel{x^2}+\cancel{1}+g(x)=\cancel{x^2}+\cancel{1}+x$

$\boxed{g(x)=x}$

$f^2(x)-g^2(x)=x^4+1+2x^2-x^2=x^4+x^2+1$

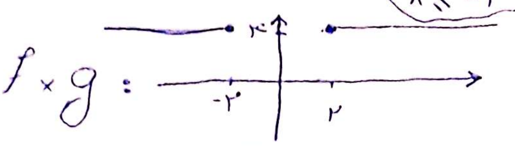
۴

$f_{(x)} = x - \sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad x^2 - 4 \geq 0$, $x^2 \geq 4$, $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

$g_{(x)} = x + \sqrt{x^2 - 4}$

$(f \times g) = (x - \sqrt{x^2-4})(x + \sqrt{x^2-4}) = x^2 - (\sqrt{x^2-4})^2 = x^2 - x^2 + 4 = 4$

$f \times g :$



۵

$g_{(x)} = \dfrac{x - b}{\underbrace{2x^2 - 3x - 5}} \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{x}{2} - \frac{b}{2}}{x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}} = \dfrac{ax + 2}{x^2 - mx + n} = f_{(x)}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \\ m = \frac{3}{2} \\ n = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$(2x - 5)(x + 1)$ $\qquad D_g = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}, -1\}$

$am - bn = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right) - \left(-4 \times \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} - 10 = -9\frac{1}{4} = \boxed{-9.25}$

۶

$D_g = D_f \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{a\}$ $\qquad f_{(x)} = \dfrac{bx + 2}{8x + b}$ $\begin{cases} 8x \neq -b \\ x = \frac{-b}{8} \end{cases}$ $\quad a = \dfrac{-b}{8}$

$g_{(x)} = c \rightarrow$ باید عدد ثابت باشد

$b = 4 \rightarrow c = \dfrac{4x + 2}{8x + 4} = \dfrac{1}{2}$ $\rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad b = -4 \rightarrow c = \dfrac{-4x + 2}{8x - 4} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad a = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\dfrac{ab}{c}} = \dfrac{-\frac{1}{2} \times 4}{\frac{1}{2}} = -4$ $\qquad \boxed{\dfrac{ab}{c}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times -4}{-\frac{1}{2}} = 4$

۷

$2f - 1 = k$, $f = \dfrac{k+1}{2} \rightarrow f = \{(-1, 2)(2, 4)(3, -2)(0, \frac{1}{2})\}$

$\dfrac{2g}{f+g} = \left\{\left(-1, \overbrace{\dfrac{2(-4)}{2-4}}^{4}\right), \left(2, \overbrace{\dfrac{2(4)}{4+4}}^{1}\right), \left(3, \overbrace{\dfrac{2(6)}{-2+6}}^{3}\right)\right\}$ $\qquad R_{\frac{2g}{f+g}} = \{1, 4, 3\}$

۸

$f = \{(2, a), (-3, 3a - 2b), (c, 5), (2, d)\}$ $\qquad g = \{(2, -1), (a - 3b, 5), (-3, 1)\}$

مساوی

$\boxed{a = d = -1}$

$3a - 2b = 1$
$-3 - 2b = 1$
$\boxed{b = -2}$

$c = a - 3b = -1 - 3(-2)$
$\boxed{c = 5}$

$c + d = 5 - 1 = \boxed{4}$

۹

$f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + x - m}$ $\quad$ Max دارد

$D_g = D_f = a$ $\downarrow$
چون دامنه تک عضوی است باید محور x ها را در ۱ نقطه قطع کند

$b^2 - 4ac = 0$
$1^2 - 4(-1 \times (-m)) = 0$
$1 - 4m = 0$
$\boxed{m = \frac{1}{4}} \rightarrow f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + x - \frac{1}{4}}$

مختصات : $Max \left| \begin{array}{l} \frac{-1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right.$ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$

$\boxed{a + b = \frac{1}{2}} \longrightarrow$ پاسخ

$D_g = D_f = \mathbb{R} - \{c\}$

چون یک عدد است پس ریشه مخرج تابع f باید مضاعف باشد

$f(x) = \frac{2x + a}{x^2 + 6x + b} = \frac{2x + a}{(x + 3)^2}$

$\Delta = 0 \Rightarrow 6^2 - 4(1 \times b) = 0$

$4b = 36 \Rightarrow \boxed{b = 9}$

$\frac{2x + a}{\underbrace{(x + 3)^2}} = \frac{2\cancel{(x + \frac{a}{2})}}{(x+3)\cancel{(x+3)}} = \frac{2}{x+3} = g(x)$

$a + b + c = 6 + 9 + (-3) = \boxed{12}$

$x - c = x + 3$

$\boxed{c = -3}$

$x + \frac{a}{2} = x + 3$

$\boxed{a = 6}$

10