آرین عباسی

19,75

(1) (2)

$y=a(x-h)^2+k \rightarrow a(x+1)^2+9$

جایگذاری

$\rightarrow 1=a(3+1)^2+9 \rightarrow 1=16a+9 \rightarrow -8=16a \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$

$y=-\frac{1}{2}(x^2+1+2x)+9 \rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{17}{2}}$

---

(2) (2)

$2x^2+mx+m+6=0$

شرط۱ $\boxed{\Delta>0}$

$\rightarrow \Delta=m^2-4(2)(m+6) \rightarrow m^2-8m-48>0$

$\leftarrow (m-12)(m+4)>0$

$\boxed{m>12 \text{ یا } m<-4} \leftarrow$ $+\ \ -4\ \ -\ \ 12\ \ +$

شرط۲: $\frac{c}{a}=\frac{m+6}{2}>0 \rightarrow m+6>0 \rightarrow \boxed{m>-6}$

شرط۳: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-m}{2}>0 \rightarrow \boxed{m<0}$

$-6 \quad -4 \quad 0 \quad 12$

$\boxed{-6<m<-4}$

---

(3) (1,75)

$3x^2+(2m-1)x+(2-m)=0$

$\frac{c}{a}=\frac{2-m}{3}$

$\frac{-b}{a}=-\frac{2m-1}{3}$

مجموع ریشه‌ها = معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها

شرط سوال $x_1+x_2=\frac{1}{x_1x_2} \rightarrow -\left(\frac{2m-1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{2-m}{3}} \Rightarrow -(2m-1)(2-m)=9$

$-(-2m^2+5m-2)=9 \rightarrow$

$2m^2-5m+2=9 \rightarrow 2m^2-5m-7=0$

$\sqrt{\Delta}=(-5)^2-4\times2\times-7=\underline{9}$

$m=\frac{5\pm9}{4}$

$m_1=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

$\Delta<0 \leftarrow m_2=-1$

غ ق ق

---

(4) (2)

$\frac{-b}{a}=\frac{1}{1}=1$

$\frac{c}{a}=-4$

$(x_1^3+x_2^3)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=?$

$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2) \Rightarrow 1+12=13$

$\frac{x_2+x_1}{x_1x_2} \Rightarrow \frac{1}{-4}$

$13-\frac{1}{4}=\frac{51}{4}$

مجموع ریشه‌ها

ضرب ریشه‌ها: $\left(x_1^3+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2^3+\frac{1}{x_1}\right) \Rightarrow x_1^3x_2^3+x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2} = -64+9-\frac{1}{4}=\frac{-221}{4}$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1+8=9$

$\boxed{y=x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}}$

⑤ ۲

$t=\sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{عبارت}]{\text{ساده‌شده}} \left(t^2+\frac{1}{t^4}+1\right)(t^2-1)=2t$

$\xrightarrow{t} (t^2-1)+t^2(t^2-1)\frac{1}{t^2}+(t^2-1)(t+1) \Rightarrow (t^4-t^2)+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)+(t^2-1) \Rightarrow$

$t^4-\frac{1}{t^2}=2t \rightarrow$ ضرب در $t^2 \rightarrow t^6-2t^3-1=0 \xrightarrow{t^3=u} u^2-2u-1=0$

$u=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2} \rightarrow t^3=1+\sqrt{2} \rightarrow t=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$

$t^3=1-\sqrt{2} \rightarrow t=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$

$x=t^3 \rightarrow x\begin{cases}1+\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{cases}$

$x_1+x_2=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$ ✓

⑥ ۲

$\frac{-b}{a}=\frac{a}{3}$ و $\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$

طبق سوال: $x_1=3x_2 \rightarrow x_1+x_2=3x_2+x_2=4x_2=\frac{a}{3} \Rightarrow x_2=\frac{a}{12}$ و $x_1=\frac{a}{4}$

ضرب: $\frac{a}{4}\times\frac{a}{12}=\frac{a^2}{48} \rightarrow \frac{a^2}{48}=\frac{4}{3} \rightarrow a^2=64 \Rightarrow a\begin{cases}8\\-8\end{cases}$ $|8-(-8)|=16$ ✓

اختلاف

⑦ ۱,۵

$\rightarrow a>0$

$x, y<0$

$y=ax^2+(3+2a)x \rightarrow x(ax+3+2a)$

زیر محور x ها: $y<0$, $x<0$

$y\geq 0, x<0$ نگذرد $\leftarrow \rightarrow x(ax+3+2a)\geq 0 \rightarrow x<0$ برای اینکه

$\begin{cases}x=0\\x=-\frac{3+2a}{a}\end{cases}$ ریشه‌ها

$y>0$ ✓ $x_2<0$: $a>0$ $-\frac{3+2a}{a}<0$ $x_2<0$

$x\to-\infty$ بررسی علامت :

$3+2a>0$

$a>-\frac{3}{2}$

۲

$\boxed{-\frac{3}{2}<a<0}$

$a<0 \leftarrow$ چون عرض از مبدا صفر است باید مثبت باشد تا از ناحیه سوم نگذرد!

$(1)\cap(2)=\varnothing$ $(1)\ a>0$

⑧ ۱

$1=x^2+ax-3 \rightarrow x^2+ax-3=0$

$1=-x^2-2x+b \rightarrow -x^2-2x+b-1=0 \rightarrow x^2+2x-b+1=0$

$x^2+ax-3=x^2+2x-b+1 \rightarrow ax-3=2x-b+1 \rightarrow (a-2)x=2-b$

$a-2=0 \rightarrow a=2$ ✓

$0=2-b \Rightarrow b=2$

$ab=2\times2=4$

$-\frac{a}{2}=\frac{2}{-2} \rightarrow \boxed{a=2}$

$1=x^2+2x-2 \rightarrow (x+3)(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases}x=1 \rightarrow A(1,1)\\x=-3 \rightarrow B(-3,1)\end{cases}$

$\boxed{b=4} \leftarrow 1=-9+6+b$

$\boxed{ab=8}$

ریشه‌های معادله اول: x_1, x_2

ریشه‌های معادله دوم: $x_1+\frac{1}{2}$ و $x_2+\frac{1}{2}$

9 (0,5)

$$\begin{cases} 2ax^2+ax-6=0 \\ \frac{-b}{a} \to x_1+x_2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2} \to \underbrace{x_1+x_2}_{-\frac{3}{2}}+1 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

معادله

$0=2x^2-ax+b$

$\frac{-b}{a} = -\frac{a}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a=-3$, $x_1x_2=\frac{b}{2}$

ضرب: $(x_1+\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2}) = x_1x_2 + \frac{(x_1+x_2)}{2} + \frac{1}{4} = ? \to x_1x_2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = x_1x_2 - \frac{1}{2}$

$(x_1+\frac{1}{2})(x_2+\frac{1}{2}) = \frac{-6}{2a} = \frac{-6}{2\times -3} = 1 \to x_1x_2 - \frac{1}{2} = 1 \to x_1x_2 = \frac{3}{2}$

$b \to x_1x_2 = \frac{b}{2} \to \frac{3}{2} \to b=3 \to \left[\frac{ab}{4}\right] \to \frac{-3\times 3}{4} \to \left[\frac{-9}{4}\right] = -3$

---

10 (2)

ریشه مشترک $=k$

معادله اول: $k^2+2k-3m=0 \to 3m=k^2+2k \to m=\frac{k^2+2k}{3}$

معادله دوم $\to k^2+6k+m=0 \to m=-(k^2+6k)$

$\frac{k^2+2k}{3} = -(k^2+6k) \to$

$-3k^2-18k = k^2+2k \to$

$4k^2+20k=0$

$4k(k+5)=0$

$\boxed{k=-5}$

$k=0$ ✗ غیر صفر (فرض مسئله)

$m=\frac{k^2+2k}{3} \to \frac{(-5)^2+2(-5)}{3} = \frac{25-10}{3} = 5$

$x^2+2x-3m = x^2+2x-15=0$

$x_1=k=-5$, $\frac{-b}{a} = -2 \to -5+x_2=-2$

$x^2+6x+m = x^2+6x+5=0 \to$ $x_2=3$

$x_1=-5$

$\frac{-b}{a}=-6 \to -5+x_2=-6 \to x_2=-1$

اختلاف: $3-(-1)=4$

9

معادله دوم
$$\begin{cases} S = \alpha+\beta = \frac{-1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{3}{a} \end{cases}$$

معادله اول
$$\begin{cases} S = \alpha+0{,}5+\beta+0{,}5 = \frac{-1}{2}+1 = \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \to a=2 \\ P = (\alpha+0{,}5)(\beta+0{,}5) = \frac{-3}{\cancel{4}\,2} = \frac{b}{2} \to b=-3 \end{cases}$$

$\left[\frac{ab}{4}\right] = \boxed{-2}$