دهم A — به نام خدا — مهدی مومنی — ۲۰

۱) (۲)

الف) $q=2 \to a_n=a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)(2^9)=2^8=256$ ✓

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}}=\frac{a_1 q^{16}}{a_1 q^{12}} \Rightarrow \frac{a_{17}}{a_{13}}=q^4 \Rightarrow q^4=2^4=16$ ✓

ج) $x^2=a_4 \times a_{10} \Rightarrow x^2=a_1q^3 a_1 q^9=a_1^2 q^{12}=2^{10} \Rightarrow x=2^5=32$ ✓

د) $128=\left(\frac{1}{2}\right)(2)^{n-1} \Rightarrow (2)^{n-1}=2^8 \to n-1=8 \to \boxed{n=9}$ ✓

---

۲) (۲)

$\left.\begin{array}{l} a_5=a_1q^4=12 \\ a_8=a_1q^7=96 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1q^7}{a_1q^4}=q^3=8 \to q=2 \to a_1=0/75 \Rightarrow a_{10}=a_1q^9=0/75\times(2)^9=2^7\times 3=384$ ✓

---

۳) (۲)

الف) $P_n=(\text{جمله وسط})^n \to 243=a_3^5 \to \boxed{a_3=3}$ ✓

ب) $P_n=\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \to 243=\sqrt{(a_1a_5)^n} \Rightarrow 59049=(a_1a_5)^5 \to \boxed{a_1a_5=9}$ ✓

---

۴) (۲)

$(4\sqrt{2})^2=2^b\times 2^a \to 2^5=2^{a+b} \to a+b=5 \to \text{واسطه حسابی}=\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}=\boxed{2/5}$ ✓

---

۵) (۲)

$q^{10}=\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2=1-x^2 \to 2x^2=1 \to x^2=\frac{1}{2} \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

حالت $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\to a_3=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $a_7=\frac{1}{2}$ ، $a_{11}=1+\frac{1}{\sqrt{2}} \to q^4=\frac{a_7}{a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}>0$

حالت $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\to a_3=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $a_7=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $a_{11}=1-\frac{1}{\sqrt{2}} \to q^4=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}<0 \to$ q^4 نمی‌تواند منفی باشد

پس تنها مقدار $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ برای x ممکن است. ✓

---

۶) (۲)

$\left.\begin{array}{l} a_1+a_1q^3=28 \\ a_1q+a_1q^2=12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to a(1+q^3)=28 \to a=\frac{28}{1+q^3} \\ \to aq(1+q)=12 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \end{array} \frac{28q(1+q)}{1+q^3}=12 \to 28q(1+q)=12(1+q^3)$

$\Rightarrow 28q+28q^2=12+12q^3 \to 12q^3-28q^2-28q+12=0 \xRightarrow{\text{ساده سازی}} 3q^3-7q^2-7q+3=0$

$\Longrightarrow$ ریشه $\to q=3 \to a_1=1$ پس دنباله $\to$ ۱، ۳، ۹، ۲۷، ...

$\text{بزرگترین جمله}=27$ ✓

---

۷) (۲)

$\left.\begin{array}{l} a+aq+aq^2=13 \\ a\times aq\times aq^2=27 \end{array}\right\} \to a^3q^3=27 \to \boxed{aq=3}$

$a+a_1q^2=10 \to \frac{a_1(1+q^2)}{aq}=\frac{10}{3} \to 3q^2-10q+3=0 \to \Delta$ ریشه بریدگی $\begin{cases} q=3 \\ q=\frac{1}{3} \end{cases}$

حالت اول $=a_1=1$ ، $a_2=3$ ، $a_3=9$ ✓

حالت دوم $=a_1=9$ ، $a_2=3$ ، $a_3=1$

۸) 2

الف) $S_{10}=a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \rightarrow S_{10}=2\left(\frac{1-3^{10}}{-2}\right)=-(1-3^{10})=59048$

ب) $P=a_1^n\left(q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right) \Rightarrow 2^{10}\left(3^{\frac{45}{2}}\right)=2^{10}\times 3^{45} \xrightarrow{\text{فرمول می}} P_n=(a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}$

---

۹) 2

$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$

$(a_1q-a_1), (a_1q^2-a_1q), (a_1q^3-a_1q^2), \ldots$

$(a_1(q-1)), (a_1q(q-1)), (a_1q^2(q-1)), \ldots \Rightarrow$ هر جمله در q ضرب شده و به جمله بعد تبدیل شده پس یک تصاعد هندسی است.

$q=\frac{a_1q\cancel{(q-1)}}{\cancel{a_1}\cancel{(q-1)}}=q$ قدر نسبت دنباله‌ی جدید همان قدر نسبت دنباله‌ی اولی است.

---

۱۰) 2

الف) $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d$

$na+(d+2d+3d+\cdots+(n-1)d) \rightarrow na+d(1+2+3+\cdots+(n-1))$

$na_1+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \xrightarrow{\text{فاکتور } \frac{n}{2}} \frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$

ب) $S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{(n-1)}$

$\times q$: $qS=aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}+aq^n$

$\xrightarrow{\text{تفاضل}} S-Sq=a-aq^n$

$\Rightarrow S(1-q)=a(1-q^n) \rightarrow S=a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$