سینا فاطمی

۱۸,۷۵

۱- الف) (۲)

$a_n = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \ldots$

$a_{۱۰} = a_۱ \times q^۹ \to \frac{۱}{۲} \times ۲^۹ = ۲^۸ = ۲۵۶$ ✓

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} = \frac{a_{۱۳} \times q^۴}{a_{۱۳}} = q^۴ \qquad ۲^۴ = ۱۶$ ✓

if $q = \frac{۱}{۳}$: $a_۱ + a_۱ q^۳ = ۲۸$, $a + \frac{۱}{۲۷} a = ۲۸$, $\frac{۲۸}{۲۷} a = ۲۸ \to a = ۲۷$

۲۷, ۹, ۳, ۱, ...

$q = ۳ \to a_۱ + a_۱ q^۳ = ۲۸$, $a + ۲۷a = ۲۸ \to a = ۱$

۱, ۳, ۹, ۲۷, ...

۲۷: بزرگترین ✓

ج) واسطه $a_۴ , a_{۱۰} = a_۷ \to a_۷ = a_۱ \times q^۶ \to \frac{۱}{۲} \times ۲^۶ = ۲^۵ = ۳۲$ ✓

د) $۱۲۸ = \frac{۱}{۲} \times q^{n-۱} \to ۲۵۶ = ۲^{n-۱} \to n = ۹$ ✓

۲- (۲)

$a_۵ = ۱۲$

$a_۸ = ۹۶ \qquad \to q^۳ = ۸ \to q = ۲$

$a_{۱۰} = ?$

$a_{۱۰} = a_۵ \times q^۵ \to ۱۲ \times ۲^۵ = ۱۲ \times ۳۲ = ۳۸۴$ ✓

۳- الف) (۲)

$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = ۲۴۳$ ($a_۲ \times a_۴$)

$a_۳^۵ = ۲۴۳ \to a_۳ = ۳$ ✓

ب) $a_۱ \times a_۵ = a_۳ \times a_۳ = ۳ \times ۳ = ۹$ ✓

۴- (۲)

$۲^a \times ۲^b = (۴\sqrt{۲})^۲ \to ۲^{a+b} = ۳۲ \to a + b = ۵ \to \frac{a+b}{۲} = ۲,۵$ ✓

۵- (۱,۷۵)

$a_۱ \times a_۳ = a_۲^۲$

$(۱+x)(۱-x) = x^۲ \to ۱ - x^۲ = x^۲ \to ۱ = ۲x^۲ \to x^۲ = \frac{۱}{۲} \to x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ✓

غ ق ق ← $q^۲ > ۰$ همیشه!

۶- (۲)

$a_۱ + a_۴ = ۲۸ \to a_۱ + a_۱ q^۳ = ۲۸ \to a(۱ + q^۳) = ۲۸$

$a_۲ + a_۳ = ۱۲ \to a_۱ q + a_۱ q^۲ = ۱۲ \to aq(۱+q) = ۱۲$

$\to \frac{a(q^۲ - q + ۱)(q+۱)}{aq(q+۱)} = \frac{۲۸}{۱۲} = \frac{۷}{۳}$

$\frac{q^۲ - q + ۱}{q} = \frac{۷}{۳} \to ۳q^۲ - ۳q + ۳ = ۷q \to ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = ۰$

$q = \frac{+۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۴ \times ۹}}{۶} = \frac{۱۰ \pm ۸}{۶} = ۳ , \frac{۱}{۳}$

$aq^{-1} + a + aq = 13 \rightarrow \frac{a}{q} + a + aq = 13 \rightarrow \frac{a + aq + aq^2}{q} = 13$

$aq^{-1} \times a \times aq = 27 \rightarrow a^3 = 27 \rightarrow a = 3$

$\times 3$

$3q^2 - 10q + 3 = 0 \rightarrow q^2 - 10q + 9 = 0 \rightarrow (q-9)(q-1) = 0$

$q = 9$ یا $q = 1$

$\frac{3}{3}, 3, 3 \times 3 \rightarrow 1, 3, 9$ ✓

یا $\frac{3}{\frac{1}{3}}, 3, 3 \times \frac{1}{3} \rightarrow 9, 3, 1$ ✓

۱- (۲)

الف)

$a_n = 2, 6, 18$

$S_{10} = 2\left(\frac{3^{10} - 1}{3 - 1}\right) = 3^{10} - 1 = 59048$ ✓

ب)

$P_{10} = \sqrt{(a_1 \times a_{10})^{10}} = \sqrt{(2 \times 2 \times 3^9)^{10}} = \sqrt{2^{20} \times 3^{90}} = 2^{10} \times 3^{45}$ ✓

$a_{10} = a_1 \times q^9 \rightarrow 2 \times 3^9$

$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$

۹- (۲)

$aq - a, aq^2 - aq, aq^3 - aq^2, \ldots$

$a(q-1), aq(q-1), aq^2(q-1), \ldots$ ✓

$\times q$ $\times q$

یک تصاعد هندسی با قدرنسبت q بدست می‌آید ✓

۱۰- (۱)

الف)

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1) \times d) \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \times d)$

چرا این پیشه خب؟

ب)

$S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$

$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n$

$S_n - qS_n = (a - aq) + (aq - aq^2) + (aq^2 - aq^3) + \ldots + aq^{n-1} - aq^n$

$S_n - qS_n = a - aq^n \rightarrow S_n(1-q) = a(1-q^n) \rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ ✓

۱۰ الف)

$$S_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \cdots + a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = na_1 + (1+2+3+\cdots+n-1)d = na_1 + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}d$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

* حاصل جمع اعداد تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$