پارسا سماعی دهم پ A تکلیف شماره‌ی ۱۴

①

$q=۲$

$a_n = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots$ $a_n = ۲^{n-۲}$

الف) $a_{۱۰} = ۲^{۱۰-۲} = ۲۵۶ = ۲^۸$

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} = \frac{aq^{۱۶}}{aq^{۱۲}} = q^۴ = ۱۶$

ج) $a_۴ \times a_{۱۰} = a_x^۲ = ۲^۲ \times ۲^۸ = ۲^{۱۰}$

$a_x = ۲^۵ = ۲^{x-۲}$ $۵ = x-۲$ $\underline{x=۷}$

د) $۱۲۸ = ۲^{y-۲} = ۲^۷ \Rightarrow ۷ = y-۲$ $y=۱۰$

---

②

$a_۵ = ۱۲ = aq^۴$ $\frac{۹۶}{۱۲} = q^۳ = ۸ = ۲^۳ \Rightarrow q = ۲$

$a_۸ = ۹۶ = aq^۷$ $a_{۱۰} = a_۸ \times q^۲ = ۹۶ \times ۴ = ۳۸۴$

---

③

$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = ۲۴۳ = a^۵ \times q^{۱۰} = (aq^۲)^۵ \Longrightarrow aq^۲ = \sqrt[۵]{۲۴۳} = ۳$

الف) $a_۳ = aq^۲ = ۳$

ب) $a_۱ \times a_۵ = a \times aq^۴ = a^۲q^۴ = (aq^۲)^۲ = ۳^۲ = ۹$

---

④

$۲^b, ۴\sqrt{۲}, ۲^a$ $(۴\sqrt{۲})^۲ = ۲^a \times ۲^b = ۳۲ = ۲^{a+b} = ۲^۵ \Rightarrow ۵ = a+b$ واسطه‌ی حسابی $\frac{a+b}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$

---

⑤

$a_۳, a_۷, a_{۱۱}$ $aq^۲, aq^۶, aq^{۱۰}$ $x^۲ = (x+۱)(۱-x) = x - x^۲ + ۱ - \cancel{x}$

$۱-x, x, x+۱$ $۲x^۲ = ۱$

$x^۲ = \frac{۱}{۲}$ $x = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

---

⑥

$a_۲ + a_۳ = ۱۲$ $aq + aq^۲ = ۱۲$ $aq(۱+q) = ۱۲$ $a = \frac{۱۲}{q(۱+q)} = \frac{۱۲}{۳+۹} = \underline{۱}$

$a_۱ + a_۴ = ۲۸$ $a + aq^۳ = ۲۸$ $a(۱+q^۳) = ۲۸$ $\frac{۱۲(۱+q^۳)}{q(q+۱)} = ۲۸ \Rightarrow ۱۲ + ۱۲q^۳ = ۲۸q + ۲۸q^۲$

$۳ + ۳q^۳ = ۷q + ۷q^۲$

بخش‌پذیر بر $(q+۱)$

$\Rightarrow ۳q^۳ - ۷q^۲ - ۷q + ۳ = ۰ \Longrightarrow ۳q^۳ - ۷q^۲ - ۷q + ۳ \div (q+۱) = ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ \Rightarrow q^۲ - ۱۰q + ۹ = ۰$

$\Rightarrow (q-۹)(q-۱) = ۰$ $۹ \xrightarrow{\div ۳} ۳$ ✓ $۱ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۱}{۳}$

$\underline{۱}, \underline{۳}, \underline{۹}, \underline{۲۷} \Longrightarrow$ ۲۷ بزرگ‌ترین است

---

⑦

$\frac{a}{d}, a, ad$ $\frac{a}{d} \times a \times ad = a^۳ = ۲۷ \Rightarrow a = ۳$

$\frac{۳}{d} + ۳ + ۳d = ۱۳ \xRightarrow{\times d} ۳ + ۳d + ۳d^۲ = ۱۳d \Rightarrow ۳d^۲ - ۱۰d + ۳ = ۰ \Rightarrow d^۲ - ۱۰d + ۹ = ۰$

$\Rightarrow (d-۹)(d-۱) = ۰$

$d = ۱ \to d = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow ۳a, a, \frac{a}{۳}$

$d = ۹ \to d = ۳ \Longrightarrow \frac{a}{۳}, a, ۳a$

$a_۱, a_۲, a_۳$

$۹, ۳, ۱$

$۱, ۳, ۹$

---

⑧

$a_n = ۲, ۶, ۱۸, \dots$ $q = ۳$ ب) $p = (a \times a_{۱۰})^۵ = (۲ \times ۲ \times ۳^۹)^۵ = ۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵}$

الف) $S_{۱۰} = \frac{a(q^{۱۰}-۱)}{q-۱} = \frac{۲(۳^{۱۰}-۱)}{۳-۱} = \frac{\cancel{۲}(۳^{۱۰}-۱)}{\cancel{۲}} = ۳^{۱۰} - ۱ = ۵۹۰۴۸$

---

⑨

$a, aq, aq^۲$

$a_۲ - a_۱, a_۳ - a_۲, a_۴ - a_۳, \dots$

$aq - a, aq^۲ - aq, aq^۳ - aq^۲, \dots$ $a(q-۱) \xrightarrow{\times q} aq(q-۱) \xrightarrow{\times q} aq^۲(q-۱)$

نسبت به دنباله‌ی قبلی $(q-۱)$ دارد
پس قدر نسبت دنباله هندسی جدید
$\underline{q(q-۱)}$ است.

---

⑩

الف) $S_n = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots + a_{n-۱} + a_{n+۱} = a + a+d + a+۲d + \dots + a+(n-۲)d + a+(n-۱)d$

$+ S_n = a+(n-۱)d + a+(n-۲)d + \dots + a+۲d + a+d + a$

$۲S_n = ۲an + (n-۱)dn$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d)$

ب) $q(a_۱ + a_۱q + \dots + a_۱q^{n-۲} + a_۱q^{n-۱}) = qS_n$ $\underbrace{a_۱q + a_۱q^۲ + \dots + aq^{n-۱}}_{S_n - a_۱} + aq^n = qS_n$

$aq^n + S_n - a = qS_n \Rightarrow S_n(q-۱) = a_۱(q^n - ۱) \Rightarrow S_n = \frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$