

برای محاسبه‌ی برد توابع یک روش اصلی وجود دارد که در واقع ما از رابطه x را خارج می‌کنیم و سپس دامنه‌ی y ها را پیدا می‌کنیم.

۱ برد توابع زیر را به کمک روش اصلی بدست آورید.

۲ الف) $y = x^2 - 5 \rightarrow x^2 = y + 5 \rightarrow x = \pm \sqrt{y+5} \rightarrow y+5 \geq 0 \rightarrow y \geq -5 \quad R_f = [-5, +\infty)$
 ب) $y = x^2 + 1 \rightarrow x^2 = y - 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{y-1} \rightarrow R_f = [1, +\infty)$

۲ برد توابع زیر را به کمک روش اصلی بدست آورید.

الف) $y = x^2 - 4x + 6 \rightarrow (x-2)^2 = y-2 \rightarrow x-2 = \pm \sqrt{y-2} \rightarrow x = \pm \sqrt{y-2} + 2 \rightarrow y-2 \geq 0 \rightarrow y \geq 2 \quad R_f = [2, +\infty)$
 ب) $y = x^2 - 5x + 1 \rightarrow y = (x-2.5)^2 - 1.25 \rightarrow y+1.25 = (x-2.5)^2 \rightarrow \sqrt{y+1.25} = |x-2.5| \rightarrow y+1.25 \geq 0 \rightarrow y \geq -1.25 \quad R_f = [-1.25, +\infty)$

۳ برد توابع زیر را به کمک روش اصلی بدست آورید.

الف) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2} \rightarrow x^2 = \frac{y(y-2)}{y-1} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y(y-2)}{y-1}} \geq 0 \rightarrow \frac{y(y-2)}{y-1} \geq 0 \rightarrow y \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \quad R_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$
 ب) $y = \frac{|x|+1}{|x|-4} \rightarrow |x| = \frac{-4y-1}{y-2} = \frac{4y+1}{y-2} \geq 0 \rightarrow \frac{4y+1}{y-2} \geq 0 \rightarrow y \in (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (2, +\infty) \quad R_f = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup (2, +\infty)$

۴ برد توابع $y = \frac{1}{x^2-4x}$ را به کمک روش اصلی بدست آورید.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16y^2 + 4y = 4y(4y+1) \geq 0 \rightarrow y \in (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty) \quad R_f = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty)$

برای پیدا کردن برد می‌توان از یک سری روش کمکی نیز استفاده کرد که از بعضی از آنها در این تکلیف استفاده می‌کنیم.

روش کمکی اول: مخصوص توابع با هسته درجه دوم که در واقع در این روش نمودار سهمی را رسم می‌کنیم و از عرض نقطه‌ی اکسترمم کمک می‌گیریم. درواقع داریم:

$R_f = [y_{\min}, +\infty)$ → توابع مینیمم دار

$R_f = (-\infty, y_{\max}]$ → توابع ماکسیمم دار

۵ برد توابع زیر را به روش کمکی اول بدست آورید.

الف) $y = x^2 - 6x + 2 \rightarrow \Delta = 36 - 8 = 28 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = 3 \pm \sqrt{7} \rightarrow y_{\min} = 2 - 9 + 9 = 2 \quad R_f = [2, +\infty)$
 ب) $y = -x^2 + 4x + 2 \rightarrow \Delta = 16 + 8 = 24 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = 2 \pm \sqrt{6} \rightarrow y_{\max} = -4 + 8 + 2 = 6 \quad R_f = (-\infty, 6]$

تذکره: در صورتی که مثلاً یک رادیکال یا هر عمل دیگری روی این توابع اعمال شده باشد می توان برد هسته عبارت را بدست آوریم سپس آن عمل را روی برد اعمال می کنیم.

$$39 - 18 = 21$$

۶ برد توابع زیر را به کمک روش کمکی اول بدست آورید.

۲ الف) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 2}$ $\rightarrow y_{\min} = \frac{-\Delta}{2a} = \frac{-21}{2} = -10.5$ $R_f = [-10.5, +\infty)$ $\rightarrow [0, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 10}$ $\rightarrow y_{\max} = \frac{-\Delta}{2a} = \frac{-54}{-2} = 27$ $R_f = (-\infty, 27]$ $\rightarrow [0, 27]$

روش کمکی دوم: در توابع چند ضابطه ای که بزرگترین توان آن ها فرد است برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است. $R_f = \mathbb{R}$

۷ برد توابع زیر را به کمک روش کمکی دوم بدست آورید.

۲ الف) $y = x^5 + 3x^3 + 2x + 1$ $\rightarrow R_f = \mathbb{R}$

ب) $y = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 6x + 1}$ $\rightarrow R_f = \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

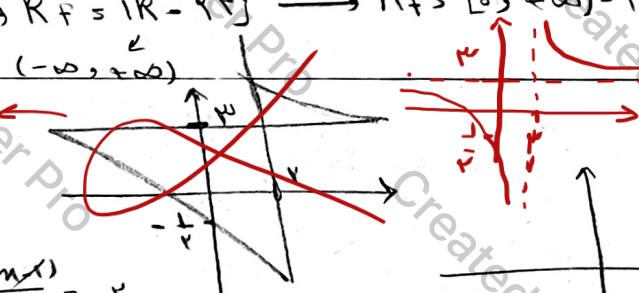
روش کمکی سوم: در توابع هموگرافیک به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ داریم: $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

۸ برد توابع زیر را به کمک روش کمکی سوم پیدا کنید.

۲ الف) $y = \frac{3x+1}{x-2}$ $\rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $y = \sqrt{\frac{4x+1}{x+3}}$ $\rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow R_f = [0, +\infty) - \{2\}$

نمودار تابع زیر را رسم کنید.



نمودار تابع زیر را رسم کنید.

۱۱۵

۲ الف) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

ب) $x = \frac{4x-2}{1-2x} = \frac{2(2x-1)}{-(2x-1)} = -2$

همگرا نیست چون ساده نمی شود

روش کمکی چهارم: در توابع به فرم $y = a + \frac{1}{x}$ داریم:

$$y = a + \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow [1, +\infty) \\ a < 0 \rightarrow (-\infty, -1] \end{cases}$$

۱۰ برد توابع زیر را بدست آورید.

۲ الف) $y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ $\rightarrow R_f = [2, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ $\rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \rightarrow x + \frac{1}{x} \rightarrow R_f = (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$