ریحانه محبی — تکلیف ۸ — دهم پنجشنبه C

---

۱) الف) ✗

$f(x)=\sqrt{x|x|}$ $\quad x|x|\geq 0$ $\quad x<0 \to |x|=-x$

$x\geq 0 \to |x|=x$ $\quad D_f=[0,\infty)$ $\quad D_g\neq D_f \to$ $\boxed{\text{پس برابر نیستند}}$

$g(x)=x \to D_g=\mathbb{R}$

ب) ✓

$g(x)=1 \to D_g=\mathbb{R}$ $\quad D_f=D_g \to$ $\boxed{\text{برابر هستند}}$

$$f(x)=\frac{(x+3)(x+1)+x+4}{x^2+5x+7} \to x^2+5x+7\neq 0$$

$\Delta=b^2-4ac \to 25-28=-3$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$\Delta<0 \to$ ریشه حقیقی ندارد پس مخرج برای تمامی اعداد حقیقی همواره + و مخالف صفر است.

ج) ✓

$g(x)=2\sin x \to D_g=\mathbb{R}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\quad D_f=D_g \to$ $\boxed{\text{برابر هستند}}$

$$f(x)=\frac{4\sin^2 x-6\sin x}{2\sin x-3} \to 2\sin x-3\neq 0$$

$2\sin x\neq 3$ $\quad \sin x\neq \frac{3}{2} \to$ هرگز $\sin x=\frac{3}{2}$ نمی‌شود پس مخرج هرگز صفر نمی‌شود و به
ازای تمامی اعداد حقیقی تعریف شده است

د) ✓ $\boxed{\text{برابر هستند}}$

$f(x)=\frac{x}{|x|} \to |x|\neq 0 \to D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ $\quad f(x)=g(x)=1 \leftarrow x>0$

$x\neq 0$ $\quad f(x)=g(x)=-1 \leftarrow x<0$

$g(x)=\frac{|x|}{x} \to x\neq 0 \to D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

$f(x)=1 \leftarrow |x|=x \leftarrow x>0$
$g(x)=1$

$f(x)=-1 \leftarrow |x|=-x \leftarrow x<0$
$g(x)=1$

---

۲) الف) ✓

$f(x)=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] \to D_f=\mathbb{R}$ $\quad$ نمودار هر دو تابع در تمام دامنه یکسان است $\quad \boxed{\text{برابر هستند.}}$

$g(x)=[x-[x]] \to D_g=\mathbb{R}$

ب) ✗ $\boxed{\text{برابر نیستند}}$

$f(x)=\frac{1}{[2x]} \to [2x]\neq 0 \to 0\leq x<\frac{1}{2}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-[0,\frac{1}{2})$

$g(x)=\frac{1}{2[x]} \to 2[x]\neq 0 \to [x]\neq 0 \to 0\leq x<1$ نباید $\to D_g=\mathbb{R}-[0,1)$ $\quad D_g\neq D_f$

ج) ✗

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}} \to x-|x|>0$ $\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}} \to x\geq 0 \to |x|-x=0,\ 0>0$ ✗

$x<0 \to |x|-x=-2x,\ -2x>0$ ✓

$D_g=(-\infty,0)$

$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \to |x|=x \to x-|x|=x-x=0,\ 0>0 \text{ ✗} \\ x<0 \to |x|=-x \to x-|x|=x+x=2x,\ 2x>0 \text{ ✗} \end{array}\right\} \to D_f=\varnothing$ $\quad \boxed{\text{برابر نیستند}}$

۱)

$\boxed{\text{برابر نیستند}}$

$g(x) = x^2 + x \rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \neq 1 \\ 2^{x-1} & ; x = 1 \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

مثال نقض:

$f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

$g(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad f(1) \neq g(1)$

اگر $x \neq 1 \rightarrow f(x) = x^3 - x$

$g(x) = x^2 + x$

$\leftarrow x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ برای این نقاط برابر است ولی برای دیگر نقاط $x \neq 1$ برابر نیست

---

۳)

$f(x) - g(x) = x^2 - x + 1$

$g(x) + f(x) = x^2 + x + 1$

$f^2(x) - g^2(x) \rightarrow$ اتحاد مزدوج

$g(x) : f(x) + g(x) - f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)$

$f(x) + g(x) - f(x) + g(x) = x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1$

$2g(x) = 2x \rightarrow g(x) = \frac{2x}{2} = x$

$\boxed{g(x) = x}$

$\boxed{f(x) = x^2 + 1}$

$f^2(x) - g^2(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2$

$(x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \quad f^2(x) - g^2(x) = \boxed{x^4 + x^2 + 1}$

---

۴)

$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$

$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

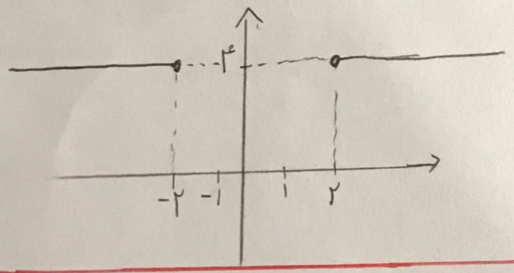
$g(x) \times f(x) = (A - B)(A + B) = A^2 - B^2 \leftarrow$ مزدوج

$g(x) \times f(x) = (x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4}) = x^2 - (\sqrt{x^2 - 4})^2$

$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \geqslant 0\} \Rightarrow (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$x^2 - (x^2 - 4) \rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 4 = \boxed{4}$

تابع $y = 4$ و فقط در دامنه تعریف شده‌اش یعنی بازه‌های $x \leqslant -2$, $x \geqslant 2$ رسم کنیم



---

۵)

$f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 - mx + n} = g(x) = \frac{x - b}{2x^2 - 3x - 5}$

$am - bn = \boxed{-\frac{37}{4}}$

$2x^2 - 3x - 5 = K(x^2 - mx + n)$

$2 = K \times 1 \rightarrow K = 2$

$2x^2 - 3x - 5 = 2x^2 - 2mx + 2n$

$-3x = -2mx \rightarrow -3 = -2m \rightarrow m = \frac{3}{2}$

$-5 = 2n \rightarrow n = -\frac{5}{2}$

(۶

$\boxed{-۴ \text{ تا } ۴}$

$f(x) = \dfrac{bx+۲}{۸x+b}$ $g(x) = c$ $\rightarrow ۸x + b \neq ۰$

$D_g = \mathbb{R} - \{a\}$ $۸x \neq -b \rightarrow x \neq -\dfrac{b}{۸} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{۸}\right\}$

$D_g = D_f \rightarrow a = \dfrac{-b}{۸} \rightarrow b = -۸a$

$\dfrac{bx+۲}{۸x+b} = c$

$bx + ۲ = c(۸x + b)$

$bx + ۲ = ۸cx + bc$

$b = ۸c$

$۲ = cb$

(۷

$f(-۱) = ۳$ $f(۲) = ۷$ $f(۳) = -۵$ $f(۰) = ۰$ $D_f = \{-۱, ۰, ۲, ۳\}$

$g(۲) = ۴$ $g(۳) = ۶$ $g(-۱) = -۴$ $g(۵) = ۰$ $D_g = \{-۱, ۲, ۳, ۵\}$

$\dfrac{۲g(-۱)}{f(-۱)+g(-۱)} = \dfrac{۲(-۴)}{۳+(-۴)} = \dfrac{-۸}{-۱} = ۸$ $\dfrac{۲g(۲)}{f(۲)+g(۲)} = \dfrac{۲\times۴}{۷+۴} = \dfrac{۸}{۱۱}$

$\dfrac{۲g(۳)}{f(۳)+g(۳)} = \dfrac{۲\times۶}{-۵+۶} = \dfrac{۱۲}{۱} = ۱۲$ $\rightarrow \boxed{\left\{۸, \dfrac{۸}{۱۱}, ۱۲\right\}}$

(۸

$D_f = D_g \rightarrow \{۲, -۳, c\} = \{۲, -۳, a - ۳b\}$ $f(۲) = g(۲) \longrightarrow d = -۱$

$d = -۱$

$d = -۱$

$c = ۵$

$f(-۳) = g(-۳) \rightarrow ۳a - ۲b = ۱$ $\leftarrow x = -۳)$

$d + c = -۱ + ۵ = \boxed{۴}$

$۳(-۱) - ۲b = ۱$ $\leftarrow a = -۱$ جایگذاری

$-۳ - ۲b = ۱$ $-۲b = ۴$

$b = -۲$

(۹

$D_f = D_g \rightarrow g(x) = \{(a, b)\} \rightarrow D_g = \{a\}, g(a) = b$ $a = \dfrac{۱}{۲}$

$\downarrow$ $b = ۰$

$D_f = \{a\}$ $-x^۲ + x - m \geqslant ۰$ $\Delta = ۱^۲ - ۴(-۱)(-m) = ۰$

$۱ - ۴m = ۰$ $۴m = ۱ \rightarrow m = \dfrac{۱}{۴}$

$a + b = \dfrac{۱}{۲} + ۰ = \boxed{\dfrac{۱}{۲}}$

(۱۰

$D_g = R - \{c\}$ $\Delta = ۶^۲ - ۴(۱)(b) = ۰$ $x^۲ + ۶x + ۹ = ۰$ $a = ۶$

$x^۲ + ۶x + b = ۰$ $۳۶ - ۴b = ۰$ $(x+۳)^۲ = ۰$ $b = ۹ \rightarrow ۶ + ۹ - ۳ =$

$۴b = ۳۶ \rightarrow b = ۹$ $c = -۳$ $\boxed{۱۲}$

$C = -۳$

$f(x) = \dfrac{۲x + a}{x^۲ + ۶x + ۹} = \dfrac{۲x + a}{(x+۳)^۲}$ $g(x) \xleftarrow{} \dfrac{۲}{x - (-۳)} = \dfrac{۲}{x+۳}$ $۲x + a = ۲(x + ۳)$

$۲x + a = ۲x + ۶$

$a = ۶$