ریحانه محبی — ۱۷/۵ — تکلیف ۸ — دهم پنجشنبه C

---

۱) الف) ✗

$f(x) = \sqrt{x|x|}$ $\quad x|x| \geq 0 \quad x<0 \to |x| = -x$

$x \geq 0 \to |x| = x \quad D_f = [0,\infty) \quad D_g \neq D_f \to$ پس برابر نیستند

$g(x) = x \to D_g = \mathbb{R}$

ب) ✓ ۵

$g(x) = 1 \to D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = D_g \to$ برابر هستند

$f(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)+x+4}{x^2+5x+7} \to x^2+5x+7 \neq 0$

$\Delta = b^2-4ac \to 25-28 = -3 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$\Delta<0 \to$ ریشه حقیقی ندارد پس مخرج برای تمامی اعداد حقیقی همواره + و مخالف صفر است.

ج) ✓

$g(x) = 2\sin x \to D_g = \mathbb{R} \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad D_f = D_g \to$ برابر هستند

$f(x) = \dfrac{4\sin^2 x - 6\sin x}{2\sin x - 3} \to 2\sin x - 3 \neq 0$

$2\sin x \neq 3 \qquad \sin x \neq \frac{3}{2} \to$ هرگز $\sin x = \frac{3}{2}$ نمی‌شود پس مخرج هرگز صفر نمی‌شود و به ازای تمامی اعداد حقیقی تعریف شده است.

د) ✓ برابر هستند

$f(x) = \dfrac{x}{|x|} \to |x| \neq 0 \to D_f = R-\{0\} \qquad f(x)=g(x)=1 \leftarrow x>0$

$x \neq 0 \qquad f(x)=g(x)=-1 \leftarrow x<0$

$g(x) = \dfrac{|x|}{x} \to x \neq 0 \to D_g = R-\{0\}$

$f(x)=1 \leftarrow |x|=x \leftarrow x>0$

$g(x)=1$

$f(x)=-1 \leftarrow |x|=-x \leftarrow x<0$

$g(x)=1$

---

۲) الف) ✓ ۱/۵

$f(x) = \left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right] \to D_f = \mathbb{R}$ ضابطه هر دو تابع در تمام دامنه یکسان است — برابر هستند

$g(x) = [x-[x]] \to D_g = \mathbb{R}$

ب) ✗ برابر نیستند

$f(x) = \dfrac{1}{[2x]} \to [2x] \neq 0 \to 0 \leq x < \frac{1}{2} \qquad D_f = R-[0,\frac{1}{2})$

$g(x) = \dfrac{1}{2[x]} \to 2[x] \neq 0 \to [x] \neq 0 \to 0 \leq x < 1$ نباید $\to D_g = R-[0,1) \qquad D_g \neq D_f$

ج) ✗

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}} \to x-|x| > 0$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}} \to x \geq 0 \to |x|-x = 0,\ 0>0$ ✗ $\quad x<0 \to |x|-x = -2x,\ -2x>0$ ✓

$D_g = (-\infty,0)$

$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \to |x| = x \to x-|x| = x-x = 0,\ 0>0 \text{ ✗} \\ x<0 \to |x| = -x \to x-|x| = x+x = 2x,\ 2x>0 \text{ ✗} \end{array} \right\} \to D_f = \varnothing$

برابر نیستند

۱) X ~~برابر نیستند~~

$g(x) = x^2 + x \rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \neq 1 \\ 2^{x-1} & ; x = 1 \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

مثال نقض

$f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

$g(1) = 1^2 + 1 = 2 \qquad f(1) \neq g(1)$

اگر $x \neq 1 \rightarrow f(x) = x^3 - x$ ، $g(x) = x^2 + x$ $\rightarrow$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right\} \rightarrow$ برای این نقاط برابر است ولی برای دیگر نقاط $x \neq 1$ برابر نیست

---

۳) ۳

$f(x) - g(x) = x^2 - x + 1$

$g(x) + f(x) = x^2 + x + 1$

$f^2(x) - g^2(x) \rightarrow$ اتحاد مزدوج

$f^2(x) - g^2(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2+1)^2 - x^2$

$(x^2+1)^2 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

$f^2(x) - g^2(x) = \boxed{x^4 + x^2 + 1}$

$g(x): f(x) + g(x) - f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)$

$f(x) + g(x) - f(x) + g(x) = x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1$

$2g(x) = 2x \rightarrow g(x) = \frac{2x}{2} = x$

$\boxed{g(x) = x}$

$\boxed{f(x) = x^2 + 1}$

---

۴)

$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$

$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

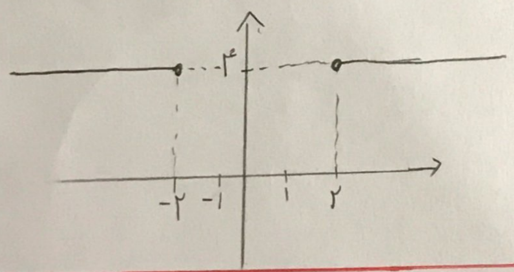
مزدوج $\rightarrow g(x) \times f(x) = (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

$g(x) \times f(x) = (x - \sqrt{x^2-4})(x + \sqrt{x^2-4}) = x^2 - (\sqrt{x^2-4})^2$

$x^2 - (x^2 - 4) \rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 4 = \boxed{4}$

$D_{f.g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \geq 0\}$ یا $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

تابع $y = 4$ فقط در دامنه تعریف شده است یعنی بازه های $x \leq -2$ ، $x \geq 2$ را رسم کنیم



۳

---

۵)

$f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 - mx + n} = g(x) = \frac{x - b}{2x^2 - 3x - 5}$

$2x^2 - 3x - 5 = K(x^2 - mx + n)$

$2 = K \times 1 \rightarrow K = 2$

$2x^2 - 3x - 5 = 2x^2 - 2mx + 2n$

$-3x = -2mx \rightarrow -3 = -2m \rightarrow m = \frac{3}{2}$

$-5 = 2n \rightarrow n = -\frac{5}{2}$

$am - bn = \boxed{-\frac{37}{4}}$

۲

۶)

$f(x)=\dfrac{bx+2}{8x+b}$ $\quad g(x)=c \quad \to 8x+b \neq 0$

$D_g = R-\{a\}$ $\quad 8x \neq -b \to x \neq -\dfrac{b}{8} \to D_f = R-\left\{-\dfrac{b}{8}\right\}$

$D_g = D_f \to a = -\dfrac{b}{8} \to b=-8a$

$\dfrac{bx+2}{8x+b}=c \quad bx+2=c(8x+b)$

$bx+2 = 8cx+bc$

$b=8c$

$2=cb$

$\boxed{-4 \text{ یا } 4}$

اینها همه مقادیر ۱- ۲f هستند f

---

۷)

$f(-1)=3 \quad f(2)=7 \quad f(3)=-5 \quad f(0)=0$

$g(2)=4 \quad g(3)=6 \quad g(-1)=-4 \quad g(5)=0$

$D_f=\{-1,0,2,3\}$

$D_g=\{-1,2,3,5\}$

$\dfrac{2g(-1)}{f(-1)+g(-1)} = \dfrac{2(-4)}{3+(-4)} = \dfrac{-8}{-1} = 8 \qquad \dfrac{2g(2)}{f(2)+g(2)} = \dfrac{2\times 4}{7+4} = \dfrac{8}{11}$

$\dfrac{2g(3)}{f(3)+g(3)} = \dfrac{2\times 6}{-5+6} = \dfrac{12}{1} = 12 \quad \to \boxed{\left\{8, \dfrac{8}{11}, 12\right\}}$

---

۸)

$D_f = D_g \to \{2,-3,c\} = \{2,-3,a-3b\} \quad f(2)=g(2) \to d=-1$

$d=-1$

$d=-1$

$c=5$

$f(-3)=g(-3) \to 3a-2b=1 \quad \leftarrow x=-3$

$d+c = -1+5 = \boxed{4}$

$3(-1)-2b=1 \quad \leftarrow a=-1$ جایگذاری

$-3-2b=1$

$-2b=4$

$b=-2$

---

۹)

$D_f = D_g \to g(x)=\{(a,b)\} \to D_g=\{a\},\ g(a)=b \qquad a=\dfrac{1}{2}$

$\downarrow$ $\qquad b=0$

$D_f=\{a\} \quad -x^2+x-m \geq 0 \qquad \Delta = 1^2-4(-1)(-m)=0$

$1-4m=0 \quad 4m=1 \to m=\dfrac{1}{4}$

$a+b = \dfrac{1}{2}+0 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

---

۱۰)

$D_g = R-\{c\}$

$\Delta = 6^2-4(1)(b)=0 \qquad x^2+6x+9=0 \qquad a=6$

$x^2+6x+b=0$

$36-4b=0 \qquad (x+3)^2=0 \qquad b=9 \to 6+9-3=$

$4b=36 \to b=9 \qquad c=-3 \qquad \boxed{12}$

$c=-3$

$f(x)=\dfrac{2x+a}{x^2+6x+9} = \dfrac{2x+a}{(x+3)^2} \qquad g(x) \leftarrow \dfrac{2}{x-(-3)} = \dfrac{2}{x+3}$

$2x+a=2(x+3)$

$2x+a=2x+6$

$a=6$