۲۵

فهمیده حاجی اعلائی — تکلیف سری ۵

سوال اول: ۲

الف) $f(x): x|x| \geq 0 \Rightarrow D_f: [0, +\infty)$
$g(x) = x \Rightarrow D_f: \mathbb{R}$
تساوی ۲ تابع برقرار نیست ✗

ب) $f(x) = x^2 + 5x + 7 \neq 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 28 = -3 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = \mathbb{R}$ — شرط دوم ضابطه: $x = 1$ برابر ✓ $x = 2$ برابر ✓ $\Rightarrow$ تساوی ۲ تابع برقرار ✓

ج) $f(x): 2\sin x - 3 \neq 0 \Rightarrow 2\sin x \neq 3 \Rightarrow \sin x \neq \frac{3}{2} \rightarrow$ همواره برقرار $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = 2\sin x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$
ضابطه: $\frac{2\sin x(2\sin x - 3)}{2\sin x - 3} = 2\sin x \rightarrow$ پس یکی هستن $\Rightarrow$ تساوی ۲ تابع برقرار ✓

د) $f(x): |x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $g(x) = x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
بررسی ضابطه: $x = -1$ ✓ $x = 2$ ✓ — پس تساوی دو تابع برقراره

سوال ۲: ۳

الف) $f(x) = x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1 \rightarrow$ همواره برقرار $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = D_f = \mathbb{R} \rightarrow$ بررسی ضابطه: هر ۲ عبارت در نهایت تنها مقدار را می‌دهند ← دو تابع برابر هستند چون

ب) $[2x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, \frac{1}{2}) = f(x)$ ، $g(x): [x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-1, 0, 1)$
دامنه‌ها یکی نیستند پس برابر نیستند. ✗

ج) $f(x) = x - |x| > 0 \Rightarrow |x| < x \rightarrow$ نادرست $\Rightarrow D_f = \varnothing$
$g(x) = |x| - x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
۲ تابع برابر نیست ✗

د) $f(x) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ ، $g(x) = \mathbb{R}$
$\rightarrow$ بررسی ضابطه: $x = 2$ ✓ ، $x = +1$ ✓
۲ تابع برابرند ✓

سؤال ۳:

$$f^2(x) - g^2(x) = (f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) = [((x^2+1)+x)(x^2+1-x)]$$

$$x^2+x+1 \qquad x^2-x+1$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+1+2x^2-x^2$$

$$\Rightarrow x^4+x^2+1 = f^2(x)-g^2(x)$$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x^2+x+1 \\ + \quad f(x)-g(x) &= x^2-x+1 \\ \hline 2f(x) &= 2x^2+2 \Rightarrow f(x) = x^2+1 = f(x) \end{aligned}$$

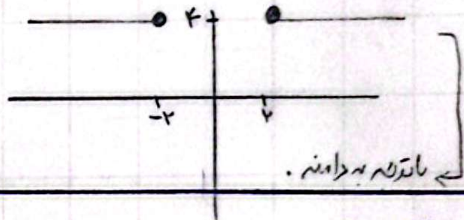
$$g(x) = x^2+x+1-(x^2+1) = x = g(x)$$

سؤال ۴:

$$f(x): x^2-4 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \geq 0 \quad \begin{array}{ccccc} & -2 & & 2 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$g(x): x^2-4 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \geq 0 \quad \begin{array}{ccccc} & -2 & & 2 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$f \times g = (x - \sqrt{x^2-4}) \times (x + \sqrt{x^2-4}) = x^2 - x^2 + 4 = 4$$



با توجه به دامنه.

سؤال ۵:

$$= g(x) = \frac{x-b}{2x^2-3x-5} \quad , \quad \frac{3ax+4}{2x^2-2mx+2n}$$ f(x) را دوباره بررسی کنیم

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} , \ b = -4 , \ m = \frac{3}{2} , \ n = -\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow am - bn = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - (-4 \times -\frac{5}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} - 10 = \frac{3-40}{4} = \frac{-37}{4}$$

سؤال ۶:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{b} = c \Rightarrow c = , \quad c = \frac{2ax+2}{8x+b} = c \Rightarrow c\left(\frac{8xc}{c} + \frac{2}{c}\right) = \frac{2x}{c} + 2$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{c}$$

$$\Rightarrow 8xc + 2 = \frac{2x}{c} + 2 \quad 8xc = \frac{2ax}{c} \Rightarrow 8c = \frac{2}{c} \quad 8c^2 = 2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = \pm 4$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{\frac{1}{2} \times 4}{\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{یا} \quad \frac{ab}{c} = \frac{-\frac{1}{2} \times -4}{-\frac{1}{2}} = -4$$

$+4$ یا -4

$$x = \pm\frac{1}{4} \Leftarrow 8x \pm 2 = 0 \Leftarrow a = \pm 2$$

سؤال ۷:

① $2x-1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ ② $2x-1 = 7 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

③ $2x-1 = -5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$ ④ $2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \{(-1, 2), (2, 4), (3, -2), (0, \tfrac{1}{2})\} \qquad 2g = \{(2, 8), (3, 12), (-1, -8), (5, 0)\}$$

$$f+g: \{(-1, -2), (3, 4), (2, 8)\} \qquad \frac{2g}{f+g}: \left\{(2, \tfrac{8}{8}), (3, \tfrac{12}{4}), (-1, \tfrac{-8}{-2})\right\}$$

[illegible] $\Rightarrow \{(2, 1), (3, 3), (-1, 4)\}$

سؤال ۸:

$a=-1$

$3a-2b=1 \overset{a=-1}{\Rightarrow} 3(-1)-2b=1 \Rightarrow -2b=4 \Rightarrow b=-\frac{4}{2}=-2$

$a-3b=-1-3(-2)=5 \Rightarrow c=5 \quad , \quad d=a \Rightarrow d=-1$

$d+c=-1+5=4$

سؤال ۹:

$-x^2+x-m=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=1-4m=0 \Rightarrow m=+\frac{1}{4}$

$-x^2+x-\frac{1}{4}\geq 0 \Rightarrow -(x^2-x+\frac{1}{4})\geq 0 \Rightarrow -(x-\frac{1}{2})^2\geq 0 \Rightarrow x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2} \qquad b=0 \qquad \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

سؤال ۱۰:

$f(x)=\frac{3x+4}{x^2+ax+b} \qquad g(x)=\frac{2}{x-c} \qquad (x-c)^2=x^2+c^2-2xc$

$-2xc=ax \Rightarrow c=-\frac{a}{2}$

$c=-2 \rightarrow \frac{2}{x+3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2}{x^2+ax+b} \Rightarrow b=9$

$(x+\frac{a}{2})=x+3$

$\frac{a}{2}=3 \Rightarrow a=6$

$a+b+c=6+9-2=13$