۲۵

نام و نام خانوادگی ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۱.... کلاس ......

۱

الف) $D_f \to f_{(x)} = \sqrt{x\sqrt{x^2}}$ → زیر رادیکال عبارت ≥ ۰ و نامنفی است → $D_f = [0, +\infty)$ ؛ $D_g = \mathbb{R}$ ⇒ $D_f \neq D_g$ ⇒ برابر نیست (×)

ج) دو تابع برابرند: ۱) دامنه‌ها برابر ۲) به ازای هر x مقدار یکسان (ضابطه برابر)

$D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ → دامنه برابر

$\to 2\sin x - 3 \neq 0 \to \sin x \neq \frac{3}{2}$ → چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ همواره برقرار است

$f_{(x)} = \frac{2\sin x(2\sin x - 3)}{2\sin x - 3} = 2\sin x = g_{(x)}$ → تساوی ضابطه‌ها ⇐ ۲ تابع برابرند (✓)

ب) $D_g = \mathbb{R}$ ؛ تساوی ضابطه‌ها: $f_{(x)} = \frac{(x+3)(x+1)+x+4}{x^2+4x+3+x+4} = 1 = g_{(x)}$

$D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$\to \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 28 < 0$ → ریشه ندارد ⇒ ۲ تابع برابرند (✓)

د) $D_f = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $|x| = 0 \to x = 0$

$D_g = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $x = 0$ → دامنه برابر

تساوی ضابطه‌ها ← هر دو به ازای اعداد + ← ۱ و به ازای اعداد − ← ۱− می‌دهند ⇐ ۲ تابع برابرند (✓)

۲

الف) $\frac{x^2}{x^2+1} \to D_f = \mathbb{R} \to x^2+1 \neq 0$: چون $x^2 \neq -1$ همواره برقرار است

حاصل این کسر همواره کوچکتر از واحد است ⇒ $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ ⇒ $\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right] = 0$ → $f_{(x)}$ → به ازای همه مقادیر صفر می‌دهد

براساس نقل تابع می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$ ⇐ $[x - [x]] = 0$ → $g_{(x)}$ هم به ازای همه مقادیر صفر می‌دهد ؛ $D_g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_{(x)} = g_{(x)}$ برابرند

ج) $x - |x| > 0$ → زیر رادیکال باید ≥ ۰ باشد و مخرج ≠ ۰

$\to x > |x|$ → ممکن نیست $\Rightarrow D_f = \emptyset$

$|x| - x > 0$ ، $|x| > x$ → به ازای اعداد منفی ⇒ $D_g = (-\infty, 0)$ → $D_f \neq D_g$ → برابر نیست

ب) $D_f \to$ ریشه مخرج: $[2x] = 0 \to 0 \leq 2x < 1 \to 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, \frac{1}{2})$

$D_g \to$ ″ ″ : $2[x] = 0$ ؛ $[x] = 0 \to 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - [0, 1)$

$\to D_f \neq D_g$ برابر نیست

د) $f_{(x)} = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ (عبارت چندجمله‌ای)

تساوی ضابطه‌ها: با ساده کردن $x-1$ ← $= x^2 + x$ ← که برابر ضابطه $g_{(x)}$ است و به ازای $(x = 1)$: $g_{(1)} = 2 = f_{(1)}$ ⇐ برابرند

۳

$$+\begin{cases} f_{(x)} + g_{(x)} = x^2 + x + 1 \\ f_{(x)} - g_{(x)} = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

$2f_{(x)} = 2x^2 + 2 \to f_{(x)} = x^2 + 1$

جایگذاری $f_{(x)}$ در اولی: $x^2 + 1 + g_{(x)} = x^2 + x + 1 \Rightarrow g_{(x)} = x$

ضابطه توابع $f_{(x)}$ و $g_{(x)}$

$\Longrightarrow f^2_{(x)} - g^2_{(x)}$ → (طبق تعریف تو درایه دوم (معادله تابع)) اعمال حاصل توان ۲ به جای $f_{(x)}$ و $g_{(x)}$ ضابطه هایشان را می‌نویسیم.

$= (x^2+1)^2 - (x)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

$= x^4 + x^2 + 1 = f^2_{(x)} - g^2_{(x)}$

۴

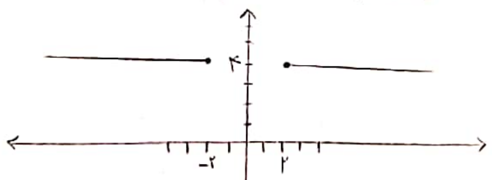
نتیجه: در دامنه هر دو تابع به خاطر $\sqrt{x^2-4}$ است که عبارت زیر رادیکال باید ≥ ۰ باشد ⇐ $x^2 - 4 \geq 0$ ← $x^2 \geq 4$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 2)$ → برای رسم تابع $f \times g$ به ۲ چیز نیاز داریم →

ضابطه: $(x + \sqrt{x^2-4})(x - \sqrt{x^2-4}) = x^2 - x^2 + 4 = 4$

دامنه → $D_{g \times f} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - (-2, 2)$

که در تمام نقاط موجود در دامنه، مقدار ثابت ۴ را می‌دهد:



۵

$D_g = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج$\}$ ← تساوی دامنه ؛ $D_f \underset{\text{باید}}{=} \mathbb{R} - \{-1, \frac{5}{2}\}$ ؛ تساوی ضابطه‌ها: $\frac{x-b}{2x^2-3x-5} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{x-b}{2}}{x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}} = \frac{ax+2}{x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$

$\to 2x^2 - 3x - 5$ ← جمله ضریب x^2 را ۱ کنیم، ضریب توان (نوع دوم)

$2x^2 - 3x - 5$ تقسیم بر $x+1$: $2x - 5$

$\to (x+1)(2x-5) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Longrightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1, \frac{5}{2}\}$

اتحاد جمله مشترک: $(x+1)(x - \frac{5}{2}) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = x^2 - mx + n \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{-5}{2} \end{cases}$

→ مخرج ۲ کسر برابر، پس صورت‌ها باید برابر باشند ⇒ صورت‌ها مساوی: $\frac{x-b}{2} = ax + 2$

← x دلخواهی غیر از ریشه مخرج قرار می‌دهیم: (باید برابر باشد) چون ۲ تابع برابرند.

$\xrightarrow{x=0} \frac{0-b}{2} = 2 \to -b = 4 \to b = -4$

$\xrightarrow{x=1} \frac{1-(-4)}{2} = a + 2 \to a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow am - bn = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - (-4)(\frac{-5}{2}) = \frac{-37}{4}$

۶

دو تابع برابرند ⟹ $\{D_f = D_g = \mathbb{R} - \{a\}$ ⟹ a باید ریشه مخرج $f(x)$ باشد → $8x+b \xrightarrow{\text{به ازای } a} = 0$ → $8a+b=0 \to a=\frac{-b}{8}$

برابری ضابطه‌ها → $\frac{bx+2}{8x+b} = c \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} bx+2 = c(8x+b) \to 2-bc = 8cx - bx = x(8c-b)$

$bx+2 = 8cx+bc$

باید ۰ باشد چون ضریب x صفر است در این طرف

$\xrightarrow{2 \text{ و } 1}$ تا $x=a$ به ازای مقادیر عبارات (تابع‌ها) تعریف نمی‌کنند

(کمکی) به طور عام اگر $\Rightarrow a = x = \frac{-bc+2}{8c-b}$ باید تعریف نشده باشد ⟹ $8c-b=0$ ، $8c=b$ ، $b=c$ ...

$2-bc=0$ ⟸ ۲ طرف ۰ بودن

$8c-b=0$ ، $c=\frac{b}{8}$

$\begin{cases} bc=2 \\ c=\frac{b}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{b^2}{8}=2 \to b^2=16$ ، $b=\pm 4$

جایگذاری: $\frac{ab}{c} = \frac{(\frac{-b}{8})b}{\frac{b}{8}} = -b = \boxed{\pm 4}$

۷

$f = \{(-1,2),(2,4),(3,-2),(0,\frac{1}{2})\}$

$D_{\frac{2g}{f+g}} = D_f \cap D_g - \{f+g \text{ ریشه}\} = \{-1,2,3\}$

$(\frac{3+1}{2})$ الهام از آ... ۱+۳ را +۱ بس ÷۲ کردم

$\longrightarrow \frac{2g}{f+g} = \{(-1,4),(2,1),(3,3)\}$

$\frac{2\times(-4)}{-4+2}$ ، $\frac{2\times 4}{4+4}$ ، $\frac{2\times 6}{6+(-2)}$

این فرایند بر روی درایه دوم دو تابع انجام می‌شود.

$\xrightarrow{\text{برد تابع}} R_{\frac{2g}{f+g}} = \{1,3,4\}$

۸

۲ تابع برابرند ← ۱) دامنه برابر دارند ۲) به ازای هر x و y یکسان می‌دهند.

$\xrightarrow{x=2} a=-1 \longrightarrow$ f برای تابع بودن (هر x یک y) $\Rightarrow -1=a=d$

$\xrightarrow{x=-3} 1=3a-2b \to 1=3(-1)-2b \to b=-2$

$\xrightarrow{y=a} a-3b=c \to -1-3(-2)=c \to c=5$

$d+c=-1+5=\boxed{4}$

۹

۲ تابع برابرند ← ۱) دامنه برابر ۲) به ازای هر x و y یکسان دارند ⟸ وقتی تابع g فقط یک زوج مرتب دارد یعنی دامنه و برد آن تک عضوی هستند ⟸ باید مقدار m را تعیین کنیم که زیر رادیکال فقط به ازای یک مقدار x ، ۰ شود ⟸ به این شکل تبدیل می‌کنیم: $\sqrt{-k^2}$ تا $k=0$ دامنه می‌باشد.

$\sqrt{-(x^2-x+m)} \longrightarrow \sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2} \longrightarrow$ باید زیر رادیکال صفر شود چون این عبارت همواره ≤۰ است و به ازای سایر مقادیر تعریف نشده است

$\longrightarrow -(x-\frac{1}{2})^2=0 \to x-\frac{1}{2}=0$ ، $\boxed{x=\frac{1}{2}} \to x=a$ (ورودی/دامنه)

$x^2-2(\frac{1}{2}x)+\boxed{\frac{1}{4}} = (x-\frac{1}{2})^2$

$\to f(\frac{1}{2}) = 0 = b$

$\Longrightarrow a+b=\boxed{\frac{1}{2}}$

۱۰

۲ تابع برابرند ← ۱) دامنه برابر ۲) به ازای هر x و y یکسان دارند ←

$D_g = \mathbb{R}-\{c\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}-\{c\}$

← ریشه مخرج تابع f باید c باشد ← یک مقدار

← یک ریشه برای عبارت درجه ۲ به معنای داشتن یک ریشه مضاعف است $(\Delta=0)$

مخرج باید مربع کامل شود ⟹ x^2+6x+b ، $\frac{6}{2}=3$ ، $3^2=9$ ⟹ $x^2+6x+9=(x+3)^2$ → $b=9$

ریشه مخرج: $(x+3)^2=0 \to x=-3 \Rightarrow c=-3$

حال اگر بخواهیم حالت ریشه مخرج (مثل ۰) ارتباط ضابطه‌ها جایگذاری می‌کنیم ←

$\frac{2}{3} = \frac{a}{9}$ ($\times 3$) → $a=6$

$a+b+c = 9+6-3 = \boxed{12}$