

۱۹۱۵

الف - $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x$

$x+1 \geq 0$
 $x \geq -1$
 $D_f = [-1, +\infty)$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $D_f \neq D_g \rightarrow X$ ✓

ب - $f(x) = \frac{(x+3)(x+1)+x+1}{x^2+5x+1}$ و $g(x) = 1$

$x^2+5x+1 \neq 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 1 \times 1 = 25 - 4 = 21$
 $\Delta > 0$ پس دو جواب متمایز دارد.
 $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ✓

ج - $f(x) = \frac{x \sin x - \cos x}{x \sin x - 1}$ و $g(x) = x \sin x$

$x \sin x - 1 \neq 0$
 $x \sin x \neq 1$
 $\sin x \neq \frac{1}{x}$
 $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ✓

د - $f(x) = \frac{x^2+x+3x+3+x+1}{x^2+5x+1} = \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+1}$

$f(x) = g(x) = 1$ ✓
 $5 - f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$
 $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$
 $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ ✓

ع - $f(x) = \frac{x \sin x (x \sin x - 1)}{x \sin x - 1} = x \sin x$
 $f(x) = g(x) = x \sin x$ ✓

$0 \rightarrow f(x) = g(x) = 0$
 $1 \rightarrow f(x) = g(x) = 1$
 $-1 \rightarrow f(x) = g(x) = -1$
 $f(x) = g(x)$ ✓

الف - $f(x) = \left[\frac{x}{x+1} \right]$ و $g(x) = [x - 1]$

$x \in \mathbb{Z}$ مثل $[1 - 1] = 0$
 $x \notin \mathbb{Z}$ مثل $[1.5 - 1] = 0$
 $f(x) = g(x) = 0$ ✓
 $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ✓

ب - $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$x = 0$ یا $x = \infty$ مثلث ناقص
 $f(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0+1} = 1$
 $g(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$
 $f(x) \neq g(x)$ X

ج - $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x+1}$

$x-1 \neq 0$
 $x \neq 1$
 $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
 $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$
 $D_f \neq D_g$ ✓

د - $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$

$x \neq 1$ و $x \neq -1$
 $x=1 \rightarrow g(x) = \frac{1+1}{1+1} = 1$
 $f(x) = 1$ ✓
 $x=2 \rightarrow g(x) = \frac{4+2}{2+1} = 2$
 $f(x) = 2$ ✓

ه - $f(x) + g(x) = x^2+x+1 \rightarrow x^2+1+g(x) = x^2+1+x \rightarrow g(x) = x$

$f(x) - g(x) = x^2 - x + 1$
 $2f(x) = 2x^2 + 2 \rightarrow f(x) = x^2 + 1$
 $f^2(x) - g^2(x) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f \times g = (x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})$$

$$= x^2 + x\sqrt{x^2 - 4} - x\sqrt{x^2 - 4} - (x^2 - 4)$$

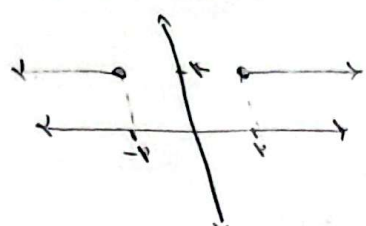
$$= x^2 - x^2 + 4$$

$$f \times g = 4$$

5

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x^2 > 4 \rightarrow x > 2 \text{ or } x < -2$$



$$\frac{x-b}{x^2-4x-4} = \frac{ax+1}{x^2-mx+n}$$

$$(ax+1)(x^2-4x-4) = (x-b)(x^2-mx+n)$$

$$ax^3 - 4ax^2 - 4ax + x^2 - 4x - 4 = x^3 - mx^2 + nx - bx^2 + mbx - bn$$

$$ax^3 - 4ax^2 - 4ax + x^2 - 4x - 4 = x^3 + x^2(-m-b) + x(n+mb) - bn$$

$$ax^3 = x^3 \rightarrow a=1 \rightarrow a=\frac{1}{1}$$

$$-4 = -bn \rightarrow bn=4$$

$$-4a = -m-b \rightarrow m+b = 4$$

$$1 - \frac{4}{1} = -m-b \rightarrow m+b = 3$$

1, 4

ادامه در صفحه بعد

$$f(x) = \frac{bx+1}{ax+b}$$

$$g(x) = c$$

$$Dg = R - \{a\}$$

$$\frac{bx+1}{ax+b} = c$$

$$acx + bc = bx + 1 \rightarrow b = ac$$

$$bc = 1$$

$$c = \frac{1}{b} \quad b = 4 \quad a = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-\frac{1}{4} \times 4}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$acx + ac^2 = acx + 1$$

$$ac^2 = 1 \rightarrow c^2 = \frac{1}{a} = -4 \rightarrow c = \pm 2i$$

2

$$a \neq 0$$

$$ax+b \neq 0$$

$$\textcircled{1} ax+1 \neq 0$$

$$ax \neq -1$$

$$x \neq -\frac{1}{a}$$

$$\textcircled{2} ax-1 \neq 0$$

$$ax \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow a = \pm \frac{1}{x}$$

$$f^{-1} = \{(-1, 4), (4, 1), (1, -4), (0, 0)\}$$

$$f = \{(-1, 4), (4, 1), (1, -4), (0, 0)\}$$

$$g = \{(4, 1), (1, 4), (-1, -4), (0, 0)\}$$

$$\frac{fg}{f+g} = \{(4, \frac{4 \times 1}{4+1}), (1, \frac{1 \times 4}{1+4}), (-1, \frac{-4 \times -4}{-4-4}), (0, \frac{0 \times 0}{0+0})\}$$

$$\frac{fg}{f+g} = \{(4, 1), (1, 1), (-1, 1), (0, 0)\}$$

$$\{(4, a), (-4, 4a-2b), (c, 0), (1, d)\} = \{(4, -1), (-4, 1), (a-4b, 0)\}$$

$$a = d = -1$$

$$4a - 2b = 1$$

$$-4 - 2b = 1$$

$$-4 = 2b + 1 \rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$a - 4b = c$$

$$-1 - 4(-\frac{5}{2}) = c$$

$$-1 + 10 = c \rightarrow c = 9$$

$$d + c = -1 + 9 = 8$$

9

* چون یک زوج مرتب داریم به این معادله که عبارت زیر را می توانیم یک دایره داشته باشیم و

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x - m}$$

$$g(x) = f(a, b)$$

$$\Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$1^2 - 4 \times 1 \times -m = 0$$

$$1 - 4m = 0$$

$$4m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

دایره اول

$$f(x) = \sqrt{-(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{0} = 0$$

دایره دوم

$$g(x) = f(a, b) = f(\frac{1}{4}, 0)$$

$$a + b = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

5

9

$$g(x) = \frac{y}{x-c}$$

$$f(x) = \frac{2x+a}{x^2+4x+b}$$

این دو دایره ای مربع
مستوی دارند چون
x-c یک دایره ای مربع دارد
برای آن هم مستوی را
پس مربع f(x) مربع دو دایره ای است.

$$x=11 \rightarrow f(x) = \frac{y}{x+3}$$

$$g(x) = \frac{2x+a}{x^2+4x+9}$$

$$f(x) = g(x)$$

$$a+b+c = 9+9-3 = 15$$

$$x^2+4x+b = x^2+4x+9$$

$$= (x+3)^2 \rightarrow b=9$$

$$\downarrow$$

$$-3 \rightarrow x = -3$$

$$x-c=0 \rightarrow c=-3$$

$$x=c$$

5

$$\frac{y}{x+3} = \frac{2x+a}{x^2+4x+9}$$

$$y(x^2+4x+9) = (x+3)(2x+a)$$

$$yx^2 + 4yx + 9y = 2x^2 + xa + 6x + 3a$$

$$yx^2 + x(4y+a) + 9y = 2x^2 + xa + 6x + 3a$$

$$a+4 = 12 \rightarrow a=8$$

$$9a = 11 \rightarrow a=2$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times -9$$

$$= 9 + 72 = 81$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$\frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x^2 + (\frac{8}{2} - 1)x + (\frac{8}{2} - 1)$$

$$x^2 + \frac{6}{2}x - \frac{8}{2} = x^2 - mx + n$$

$$-m = \frac{6}{2} \rightarrow m = \frac{6}{2}$$

$$n = -\frac{8}{2}$$

دایره اول و دوم

$$g(x) = \frac{x-b}{x^2-3x-6}$$

$$f(x) = \frac{ax+2}{x^2-mx+n}$$

دایره اول و دوم
مستوی دارند چون

تبدیل به دایره اول و دوم

$$am - bn = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - 10 = \frac{3}{4} - 10$$

$$= \frac{3-40}{4} = \frac{-37}{4}$$

* اینجا با توجه به این که f(x) و g(x) دو دایره ای مربع
است پس صورت آن هم باید دو دایره ای باشد:

$$x-b = 2(ax+2)$$

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$x-b = 2ax+4$$

$$-b = 4 \rightarrow b = -4$$

$$am - bn = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - (-4 \times 10)$$

$$= \frac{3}{4} - 10 = \frac{3-40}{4} = \frac{-37}{4}$$