به نام خدا

نام و نام خانوادگی ...نیلوفر ... **پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره** ...۲... **کلاس** ...دهم ریاضی...

۲۰

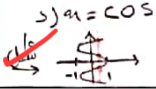
۱

الف) با استفاده از تعریف ریاضی تابع → $y^3 - x = 2x^2 \to y^3 = 2x^2 + x \to \begin{cases} y_1^3 = 2x_1^2 + x_1 \\ y_2^3 = 2x_2^2 + x_2 \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2} y_1^3 = y_2^3 \Rightarrow y_1 = y_2$ رابطه تابع است

ب) $|y| + x^2 = x + 3 \xrightarrow[\text{مثال نقض}]{x=1} |y| + 1 = 1 + 3 \to |y| = 3 \Rightarrow y = \pm 3 \to$ به آرایه ۱ دو مقدار داده است ⇒ رابطه تابع نیست

ج) $\sqrt{x-4} + |y-2| = 0$ → جمع ۲ عبارت نامنفی برابر ۰ شده ⇒ هر کدام از عبارات باید برابر ۰ باشند ⇒ $\begin{cases} \sqrt{x-4} = 0 \to x - 4 = 0 \to x = 4 \\ |y-2| = 0 \to y - 2 = 0 \to y = 2 \end{cases}$
⇒ این رابطه فقط یک زوج مرتب $(4,2)$ را در اختیار ما قرار می‌دهد (یا نقطه شکل آن است) ⇒ رابطه تابع است

د) $x = \cos y \xrightarrow[\text{مثال نقض}]{x=0}$ $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و ... قابل قبول است ⇒ برای این مقادیر ⇒ رابطه تابع نیست (منحنی به درستی رسم نشده است)



شکل ← خطی موازی محور y ها آن را در بیش از یک نقطه قطع [می‌کند]

۲

الف) $\frac{x+4}{x^2-4x} = \frac{x+4}{x(x-4)}$ → دامنه تابع کسری $= \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ ⇒ $x(x-4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \to x = 4 \end{cases}$ (ریشه‌های مخرج) ⇒ $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

ب) $\frac{x+4}{x^2-7x+14}$ → دامنه $= \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ ⇒ $x^2 - 7x + 14 = 0 \to \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 56 < 0$ ⇒ ریشه حقیقی ندارد ⇒ $D_f = \mathbb{R}$

ج) $\frac{x+4}{x^2+x+4}$ → دامنه $= \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ ⇒ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 16 < 0$ ⇒ ریشه حقیقی ندارد ⇒ $D_f = \mathbb{R}$

د) $\frac{x+4}{x^4-4x^2} = \frac{x+4}{x^2(x+2)(x-2)}$ → دامنه تابع کسری $= \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ ⇒ $x^2(x+2)(x-2) = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \\ x + 2 = 0 \to x = -2 \\ x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$

⇒ $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

۳

الف) $y = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2}$ → دامنه در توابع رادیکالی با فرجه زوج: عبارت زیر رادیکال ≥ 0 ⇒ $\begin{cases} 6 - x \geq 0 \to x \leq 6 \\ x - 2 \geq 0 \to x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 2 \leq x \leq 6$
⇒ $D_f = [2, 6]$

ب) $y = \frac{3x+1}{x^2+1}$ → دامنه در توابع کسری: $R - \{$ریشه‌های حقیقی مخرج$\}$ → $x^2 + 1 \to \Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 < 0$ ⇒ ریشه ندارد؛ $x^2 \geq 0$ (همواره) ⇒ $x^2 + 1 \geq 1$ → پس هیچ‌گاه $= 0$ نمی‌شود ⇒ به ازای همه مقادیر بر تعریف می‌شود: $D_f = \mathbb{R}$

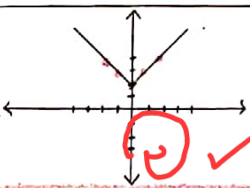
ج) $\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ → زیر رادیکال باید ≥ 0 باشد، مخرج هم نباید صفر شود ⇒ $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \to x \geq 2 \\ x - 4 \neq 0 \to x \neq 4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = [2, +\infty) - \{4\}$

د) $\frac{2x+3}{|x|+x^2}$ → دامنه تابع کسری $= \mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$ ⇒ $|x| + x^2 = 0 \Rightarrow |x| = x^2 = 0 \to x = 0$ (جمع ۲ عبارت نامنفی $= 0$ ⇐ هر دو $= 0$) ریشه مخرج ⇒ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

۴

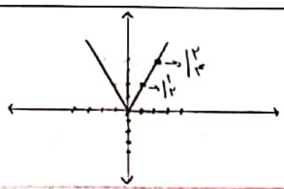
الف) $y = |x| + 2$ — ۲ به عرض از مبدأ آن اضافه شده (نمودار |x| دو واحد به بالا می‌رود)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	3	2	3	4



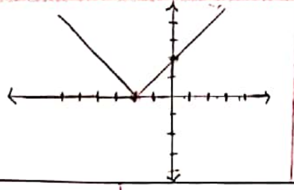
ب) $y = 2|x|$ (در این بین شیب رسم دقیق‌تر) (بازوهای این تابع نسبت به |x| به محور y ها نزدیک‌تر شده اند)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	2	4



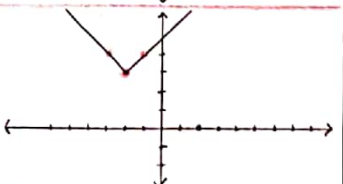
ج) $y = |x+2|$ (۲ تا به چپ رفته است)

x	-4	-2	0	1	4	-8
y	2	0	2	3	6	6



د) $y = |x+2| + 3$ ($|x+2|$ کمترین مقدار ... $x+2=0$)

x	-2	-1	-3	0	-4	1
y	3	4	4	5	5	6

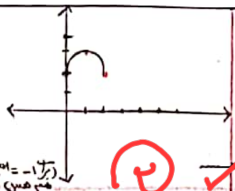


۵

الف) $y = \sqrt{x(2-x)} + 2$

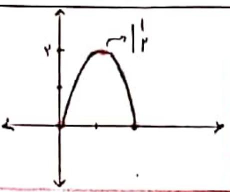
x	0	1	2	3
y	2	3	2	$\sqrt{3(-1)}+2$

زیر رادیکال منفی ← تعریف نشده است



ب) $y = 2\sqrt{x(2-x)}$

x	0	1	2
y	0	2	0

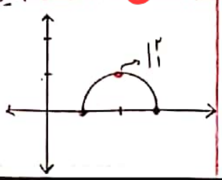


دامنه این تابع و تابع الف: $[0, 2]$

ج) $y = \sqrt{(x-1)(3-x)}$

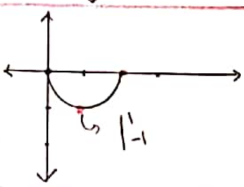
x	1	2	3
y	0	1	0

دامنه این تابع ← $[1, 3]$



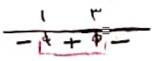
د) $y = -\sqrt{x(2-x)}$ تابع نسبت به محور x ها قرینه

x	0	1	2
y	0	-1	0



با توجه به شکل $R^2 = x^2 + y^2$ درس ۱۹۳ جزوه بنش سعی کردم تابع $f(x)$ را به صورت ضابطه بنویسیم ← $y^2 = R^2 - x^2$
چون تابع ما نیم دایره‌ای در ناحیه‌های دارای $y > 0$ است:
$y = \sqrt{(R-x)(R+x)} \xrightarrow[\text{در شکل}]{R=1} y = \sqrt{(1-x)(1+x)}$
اما چون مرکز نیم دایره به جای $(0,0)$، $(1,0)$ است و ریشه‌های آن (۲) و (۰) هستند: $y = \sqrt{(x)(2-x)}$
(رأس این سهمی (نیم دایره) نقطه $(1,1)$ است)

۱ و ۳ ریشه‌ها هستند



۶

الف) ریشه‌ها ←
- $x-2=0 \to x=2$
- $x-3=0 \to x=3$
- $x-4=0 \to x=4$

x: ۲، ۳، ۴ — علامت: $-$ | $+$ | $-$ | $+$

$\leftarrow (1-2)(1-3)(1-4) = -6 < 0$

(۲) ✓

ب) ریشه‌ها ←
- $x-2=0 \to x=2$
- $(x-3)^2=0 \to x-3=0 \to x=3^*$ مضاعف (زوج بار)
- $x-4=0 \to x=4$

x: ۲، *۳، ۴ — علامت: $+$ | $-$ | $-$ | $+$

۷

الف) ریشه‌ها ←
- $x-2=0 \to x=2$
- $x-4=0 \to x=4$
- $x-3=0 \to x=3$

x: ۲، ۳ (ت)، ۴ — علامت: $-$ | $+$ | $-$ | $+$ (ریشه مخرج است)

(۲) ✓

ب) ریشه‌ها ←
- $x-2=0 \to x=2$
- $x-4=0 \to x=4$
- $(x-3)^2=0 \to x-3=0 \to x=3^*$ مضاعف

x: ۲، *۳ (ت)، ۴ — علامت: $+$ | $-$ | $-$ | $+$ (ریشه مخرج)

۸

الف) $y = \dfrac{x^3-x-2x+2}{x-3} = \dfrac{x(x^2-1)-2(x-1)}{x-3} = \dfrac{x(x-1)(x+1)-2(x-1)}{x-3} = \dfrac{(x-1)\big(x(x+1)-2\big)}{x-3} = \dfrac{(x-1)(x-1)(x+2)}{x-3}$

ریشه‌ها ←
- $x-1=0 \to x=1^*$ مضاعف
- $x+2=0 \to x=-2$
- $x-3=0 \to x=3$

x: ۲-، *۱، ۳ (ت) — علامت: $+$ | $-$ | $-$ | $+$ (ریشه مخرج)

(۲) ✓

ب) $y = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$ ← ریشه‌ها
- $x-2=0 \to x=2$
- $x-3=0 \to x=3$
- $x-1=0 \to x=1^*$ مضاعف

x: *۱ (ت)، ۲، ۳ (ت) — علامت: $+$ | $+$ | $-$ | $+$

۹

الف) $y = \dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2+x+2}$ ← ریشه‌ها
- $x^2=0 \to x=0$ مضاعف*
- $x-1=0 \to x=1$
- $x+1=0 \to x=-1$

$\Delta = b^2-4ac = 1-8 < 0 \to$ ریشه ندارد

x: ۱-، *۰، ۱ — علامت: $+$ | $-$ | $-$ | $+$

$x=2>1 \to \dfrac{4(1)(3)}{8} = \dfrac{3}{2} > 0$

(۲) ✓

ب) $y = \dfrac{x^2+3x+4}{x^2+2x+3} \longrightarrow \Delta = b^2-4ac = 9-16 = -7 < 0 \Rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد $\rightsquigarrow x^2+3x+4 = x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

← این عبارت همواره + است

(حداقل مقدار پرانتز ۰ است یعنی در آن حالت هم مقدار $\frac{7}{4} > 0$)

$\Delta = b^2-4ac = 4-12 = -8 < 0 \to$ ریشه حقیقی ندارد $\rightsquigarrow (x+1)^2+2 = x^2+2x+3$

این عبارت همواره + است

$0 <$

$\Rightarrow$ عبارت ب همواره (به ازای همه مقادیر $\mathbb{R}$) + است

۱۰

الف) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x+1)(x-1)}}$ پرانتز دوم ابتدا باقی و لاغر همواره + است ($\Delta<0 \Leftarrow$ ریشه ندارد) $1-4<0$

← ریشه‌ها ←
- $x=1 \to$ مضاعف
- $x=0$
- $x=-1$

x: ۱-، ۰، *۱ — علامت: $+$ | $-$ | $+$ | $+$

$\Rightarrow D_f = (-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

(با جایگذاری عددی ۱< ⇐ عبارت +)

(۲) ✓

مسئله ۲۴: عبارت زیر رادیکال باید $0 \leq$ باشد

ب) $y = \sqrt{\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(x-1)}}$ ← ریشه‌ها
- $x=4 \to$ مضاعف
- $x=-4$
- $x=1$

x: ۴-، ۱، *۴ — علامت: $+$ | $-$ | $+$ | $+$

$D_f = (-\infty,-4]\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$

(با جایگذاری عددی ۴< ⇐ عبارت +)