نام و نام خانوادگی ..... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..... کلاس .....

۱

باتوجه به سؤال ۶ عدد آخر هر دسته برابر n^2 و عدد اول آن $(n-1)^2+1$ است :

دسته پنجم → عدد آخر $= 9^2 = 81$ ، عدد اول $= 8^2+1 = 65$

واسطه حسابی $b = \frac{a+c}{2}$ ⟵ $\frac{81+65}{2} = \underline{73}$

۲

دسته اول → $\{1, 2, 3\}$ ، دسته دوم → $\{4, \ldots, 12\}$ ، دسته سوم → $\{13, \ldots, 39\}$ ، دسته چهارم → $\{40, \ldots, 120\}$

دسته پنجم → $\{121, \ldots, 363\}$ ⟵ جون اعداد طبیعی متوالی دنباله حسابی هستند میانگین عدد اول و آخر برابر میانگین کل اعضاست. (در واقع جمله وسط)

$\Rightarrow \frac{121+363}{2} = \underline{242}$

۳

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9 = 20 + (-26) + 4 + \left[\frac{3}{0+2}\right] + a + \ldots$

$= 1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+1 = 25+3a = 19$

$3a = -6$

$a = -2$

$a_2, a_5, \ldots$ اندیس‌هایشان $n = 3k+2$ است → $\left[\frac{2}{2}\right]^1-2 + \left[\frac{5}{3}\right]^1-2 + \left[\frac{8}{4}\right]^2-2 + \left[\frac{11}{5}\right]^2-2 + \left[\frac{14}{6}\right]^2-2 + \left[\frac{17}{7}\right]^2-2 + \left[\frac{20}{8}\right]^2-2 + \left[\frac{23}{9}\right]^2-2 + \left[\frac{26}{10}\right]^2-2 + \left[\frac{29}{11}\right]^2-2 = \underline{-2}$

۴

$a_5 = 14$ ، $a_7 = 17,2$ ⟵ مرکزی جمله عمومی دنباله درجه ۲ : $a_n = an^2+bn+c$ ⟵ ضریب بزرگترین درجه : $a = \frac{1}{10}(-14) = \frac{-1}{5}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_5 = \frac{-1}{5}(25) + 5b + c = 14 \rightarrow 5b+c = 19 \\ a_7 = \frac{-1}{5}(49) + 7b + c = 17,2 = \frac{86}{5} \rightarrow 7b+c = 27 \end{cases}$

$2b = 8 \rightarrow b = 4 \rightarrow c = -1$

$\Rightarrow a_n = \frac{-1}{5}n^2 + 4n - 1$

$\Rightarrow \frac{a_{15}}{a_1} = \frac{\frac{-1}{5}(15^2)+4(15)-1}{\frac{-1}{5}(1)^2+4(1)-1} = \frac{14}{\frac{14}{5}} = \underline{5}$

۵

مرکزی اکثر جملات : $t_n = an+b$ ⟵ اختلاف هر دو جمله متوالی a است ⟹ $t_m - t_n = (m-n)a$ ⟹ $t_7 - t_2 = 5a$

مرکزی دنباله حسابی : $f_n = f_1 + (n-1)d$ ⟵ اختلاف هر دو جمله متوالی d است ⟵ $f_1 - f_4 = 4d$

اندیس $t_2 = f_4$ ، $t_7 = f_8$ → $t_7 - t_2 = f_8 - f_4 \Rightarrow 5a = 4d$ (۱)

$t_{10} = 10a+b = 0 = 4d+b = 0 \Rightarrow b = -4d$ (۲)

$10a = 8d$

(۱) و (۲) → $\frac{t_{15}}{d} = \frac{15a+b}{d} = \frac{3(8d)+(-4d)}{4d} = \underline{4}$

۶

$a_2 = a$ فرض می‌کنیم ⟶ $6a^2 = 5(a+d)(a-d) + 3a(a-d) = 5a^2 - 5d^2 + 3a^2 - 3ad$ ($(a+d)(a-d) = a^2 - d^2$)

$a_3 = a + d$

$a_1 = a - d$

$\Rightarrow 0 = 2a^2 - 3da - 5d^2$ (a ، b ، c) $\xrightarrow{\text{دلتا!}} \Delta = b^2 - 4ac = 9d^2 + 40d^2 = 49d^2$

$\to a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3d \pm \sqrt{49d^2}}{4}$

$\to \begin{cases} a = 2.5d = a_2 \\ a = -d = a_2 \end{cases} \Rightarrow a = a_2 - d$ (جمله اول) $\to \begin{cases} a = 1.5d \\ a = -2d \end{cases}$

$\to a_4 = a + 3d \to \begin{cases} 1.5d + 3d = 4.5d = a_4 \\ -2d + 3d = d = a_4 \end{cases}$

$\to \frac{a_4}{d} \to \begin{cases} \frac{4.5d}{d} = 4.5 \\ \frac{d}{d} = 1 \end{cases}$

۷

$a, b, c \xrightarrow[\text{مساوی}]{\text{واسطه}} b = \frac{a+c}{2} \Longrightarrow \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}} = q = \frac{c}{2a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a+c}{2}} = \frac{a}{a+c}$ ($q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$) $\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} c^2 + ac = 2a^2$

$\to c^2 + ac - 2a^2 = 0$

برای پیدا کردن ریشه‌ها c را مجهول فرض کرده و دلتا را حساب می‌کنیم ← ضرایب $\begin{cases} a = 1 \\ b = a \\ c = -2a^2 \end{cases}$

$9a^2 = \Delta = b^2 - 4ac = a^2 + 8a^2 \longleftarrow$

$\longrightarrow c = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-a \pm \sqrt{9a^2}}{2} \to \begin{cases} c = -2a \rightsquigarrow q = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{-2a}{2}}{\frac{a}{2}} = -1 \xrightarrow{\text{q برابر ۲}} 2 \times (-1) = -2 \\ c = a \to \text{غ ق ق} \end{cases}$

چون a، b و c متمایزاند.

۸

$b^2 = ac$ (واسطه هندسی) $\quad 3b + c = 4a$ (واسطه مساوی) $\Rightarrow b = \frac{4a - c}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} b^2 = \frac{16a^2 + c^2 - 8ac}{9} \Rightarrow \frac{16a^2 + c^2 - 8ac}{9} = ac$

$\to 16a^2 + c^2 - 8ac = 9ac \to 16a^2 + c^2 - 17ac = 0 \to \Delta = b^2 - 4ac = 289c^2 - 4(16)(c^2) = 225c^2$

$\to a \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{17c + 15c}{32} = c \quad \text{غ ق ق} \to \text{متمایزاند a و c} \\ a = \frac{17c - 15c}{32} = \frac{1}{16}c \rightsquigarrow \frac{c}{a} = q^2 = \frac{c}{\frac{1}{16}c} = 16 \to q = \pm 4 \end{cases}$ ($\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$)

$q = \pm 4 \to$ $+4$ غیرقابل قبول، چون نامتساوی:

اما $16a, 2a, 128a \longrightarrow d = 14a \Rightarrow -112a, 2a, 16a$ (حسابی نیست)

$\to \frac{a_9}{a_6} = q^3 = (-4)^3 = -64$

۹

$\frac{a_6}{(a_2)^3} + \frac{a_2}{(a_1)^2} \Rightarrow \frac{aq^5}{a^3q^3} = \frac{q^2}{a^2} \; , \; \frac{aq}{a^2} \to \frac{q^2 + aq}{a^2} = 2 \to q^2 + aq - 2a^2 = 0 \to a \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-q + \sqrt{9q^2}}{-4} = \frac{-q}{2} \\ a = \frac{-q - \sqrt{9q^2}}{-4} = q \end{cases}$ ($\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$)

(طبق تعریف دنباله هندسی) $\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ ساده کردن

$\frac{a^2}{aq} = \frac{a}{q} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{-q}{2} \to \frac{\frac{-q}{2}}{q} = \frac{-1}{2} = \frac{a_1}{a_2} \\ a = q \to \frac{a^2}{aq} = \frac{q^2}{q^2} = 1 = \frac{a_1}{a_2} \end{cases}$

۱۰

$a_5 = 27 \to a_4 = \frac{27}{q}, \; a_3 = \frac{27}{q^2} \; , \; a_3 = \sqrt{a_4} \to \frac{27}{q^2} = \sqrt{\frac{27}{q}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{q}} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \frac{3^6}{q^4} = \frac{3^3}{q} \to 27q = q^4$

$q^3 = 27$

$q = 3$

$\to a_5 = a_1 q^4 = 27 \to \frac{27}{q^4} = a_1 \to \frac{27}{81} = a_1 = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

a_1 ، $\frac{1}{6}$ از $\frac{1}{2}$ کمتر است.