۱- الف) $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots \quad a_n = \frac{1}{2}(2)^{n-1}$ ($\times 2$, $\times 2$)

$a_{10} = (\frac{1}{2})(2)^{10-1} = 512 \times \frac{1}{2} = \boxed{256}$

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{\frac{1}{2}(2)^{17-1}}{\frac{1}{2}(2)^{13-1}} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$

ج) $(\frac{1}{2}(2)^{4-1})(\frac{1}{2}(2)^{10-1}) = 2^2 \times 2^8 = 2^{10} = b^2, \quad b = \pm 2^5$

اما با توجه به متن سوال چون دنباله صعودی است پس $+2^5$ قابل قبول است

د) $128 = \frac{1}{2}(2)^{n-1} \to 256 = 2^{n-1} \quad n-1 = 8 \to \boxed{n=9}$

۲- $a_5 = ar^4 \qquad \frac{a_8}{a_5} = r^3 = \frac{96}{12} \to r^3 = 8 \to r = 2$

$a_8 = ar^7$

$a_{10} = a_8 \times r^2 = 96 \times 2^2 = \boxed{384}$

۳- الف) $\frac{a_3}{q^2} \times \frac{a_3}{q} \times a_3 \times a_3 q \times a_3 q^2 = 243$

$a_3^5 = 243 \to \boxed{a_3 = 3}$

ب) $\frac{a_3}{q} \times a_3 q = a_3^2 = 3^2 = \boxed{9}$

۴- $2^a \times 2^b = (4\sqrt{2})^2 \to 2^{a+b} = 32 = 2^5 \to \boxed{a+b=5}, \quad \frac{5}{2} = 2/5$

۵-

$\frac{a_7}{a_3} = q^4 = \frac{x}{1-x}$

$\frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{x}$

$\frac{a_{11}}{a_7} = q^4 = \frac{x+1}{x} \qquad x^2 = 1 - x^2 \to 2x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{2} \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

به ازای $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ حاصل $\frac{a_{11}}{a_7} = q^4$ عددی منفی می شود در صورتی که q^4 قطعا نامنفی است پس

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ غیر قابل قبول است

$x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶. $a_1 + a_1 q^3 = 28 \to a_1(1+q^3) = 28$, $a_1 q + a_1 q^2 = 12 \to a_1 q(1+q) = 12$

$\frac{a_1(1+q^3)}{a_1 q(1+q)} = \frac{28}{12}$, $\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{7}{3}$

$3 - 3q + 3q^2 = 7q \to 3q^2 - 10q + 3 = 0$, $q = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3\times 3)}}{2(3)}$

$= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow q = 3$ 1 3 9 (27)

$q = \frac{1}{3}$ (27) 9 3 1

بزرگترین

۷. $a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 = 27 \to a_1^3 q^3 = 27 \to a_1 q = 3 \to a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 13$

$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 13 \to \frac{3}{q} + 3q = 10 \to 3q^2 - 10q + 3 = 0$

$q = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2(3)}$ → $q = 3$: 1, 3, 9, ...
→ $q = \frac{1}{3}$: 9, 3, 1, ...

۸. الف) $q = \frac{18}{6} = 3$, $S_{10} = \frac{2(3^{10}-1)}{3-1} = 3^{10} - 1 = 59048$

ب) $P_{10} = (2 \times (2 \times 3^9))^{\frac{10}{2}} = (2^2 \times 3^9)^5 = 2^{10} \times 3^{45}$

۹. $a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \dots \to a_1 q - a_1, a_1 q^2 - a_1 q, a_1 q^3 - a_1 q^2 \to$

$\underbrace{a_1(q-1), a_1 q(q-1)}_{\times q}, a_1 q^2(q-1)$

$q =$ قدرنسبت

۱۰. مجموع تفاضل d $= \frac{n(n-1)}{2}$

الف) $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + (n-1)d =$

$n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d \to \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

ب) $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1}$ $\times q$, $q S_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^n$

$\to q S_n - S_n \to (q-1) S_n = aq^n - a = a(q^n - 1) \to S_n = \frac{a(q^n - 1)}{(q-1)}$

اگر $q \neq 1$ باشد اینگونه می‌شود در غیر صورت دنباله ثابت می‌باشد.