بها رستگاری — کلاس دهم دختر ۲ — تکلیف ۱۴

---

۱) الف) $\frac{۱}{۲} \times ۲^{۹} = ۲^{۸} = \boxed{۲۵۶}$

$a_n = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots \Rightarrow a_n = a_۱ q^{n-۱} \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۲} \times ۲^{n-۱}$

×۲ ×۲

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} = \frac{a_۱ q^{۱۶}}{a_۱ q^{۱۲}} = q^{۴} = ۲^{۴} = \boxed{۱۶}$

ج. $a_۴ = a q^{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۲^{۳} = ۴$

$a_{۱۰} = \frac{۱}{۲} \times q^{۹} = \frac{۱}{۲} \times ۲^{۹} = ۲۵۶$

$\pm\sqrt{۴ \times ۲۵۶} = \boxed{۳۲}$

د) $a_۱ q^{n-۱} = ۱۲۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۲^{n-۱} = ۱۲۸ \Rightarrow \boxed{n = ۹}$

جمله‌ی نهم

---

۲) $\frac{a_۸}{a_۵} = r^{۳} = \frac{۹۶}{۱۲} = ۸ \Rightarrow r = ۲$

$a_{۱۰} = a_۸ r^{۲} = ۹۶ \times ۴ = \boxed{۳۸۴}$

---

۳) الف) $(a_۳)^{۵} = ۲۴۳ \Rightarrow (a_۳)^{۵} = ۲۴۳ \Rightarrow \boxed{a_۳ = ۳}$

ب) $a_۱ \times a_۵ = (a_۳)^{۲} = \boxed{۹}$

با توجه به واسطه‌ی هندسی

---

۴) $۲^{a+b} = (۴\sqrt{۲})^{۲} \Rightarrow ۲^{a+b} = ۲^{۵} \Rightarrow a+b = ۵$

واسطه حسابی a و b $= \frac{a+b}{۲} = \frac{۵}{۲} = \boxed{۲٫۵}$

---

۵) $۱-x$ و x و $x+۱$ [illegible] $\Rightarrow (۱-x)(x+۱) = (x)^{۲}$

$(۳) \frac{}{۴} (۷) \frac{}{۴} (۱۱)$ پس جمله‌ی هفتم واسطه هندسی جملات سوم و یازدهم است.

$۱ - x^{۲} = x^{۲} \Rightarrow ۱ = ۲x^{۲}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

اما فقط ریشه مثبت ق.ق است (با یادآوری متوجه می‌شویم $\frac{a_{۱۱}}{a_۷}$ نمی‌تواند منفی باشد.

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

---

۶) $a_۱ + a_۱ r^{۳} = ۲۸$

$a_۱ r + a_۱ r^{۲} = ۱۲$

$\frac{a_۱(۱+r^{۳})}{a_۱ r(۱+r)} = \frac{۲۸}{۱۲}$

$\frac{\cancel{a_۱}\cancel{(۱+r)}(۱-r+r^{۲})}{\cancel{a_۱} r \cancel{(۱+r)}} = \frac{۷}{۳}$

$۳ - ۳r + ۳r^{۲} = ۷r \Rightarrow ۳r^{۲} - ۱۰r + ۳ = ۰$

روش [illegible]: $r^{۲} - ۱۰r + ۹ = ۰$

$(r-۱)(r-۹) \Rightarrow r = \frac{۱}{۳}, \quad r = \frac{۹}{۳} = ۳$

if $r = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{۲۷}, ۹, ۳, ۱$

if $r = ۳ \Rightarrow ۱, ۳, ۹, \boxed{۲۷}$

Scanned with CamScanner

۷)

$\frac{a}{r}, a, ar \qquad a^{۳} = ۲۷ \Rightarrow a = ۳$

به جای a ۳ $\underbrace{\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right)}_{\frac{۱۳}{۳}} = ۱۳ \Rightarrow r + \frac{1}{r} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow r = ۳$ یا $\frac{1}{۳}$

if $r = ۳ \Rightarrow \boxed{۱, ۳, ۹}$

if $\frac{1}{۳} \Rightarrow \boxed{۹, ۳, ۱}$

* اگر نتوانیم تشخیص دهیم کدام اعداد هستند با ضرب کردن r آن را تبدیل به معادله درجه ۲ می‌کنیم و حل می‌کنیم.

---

۸) الف)

$a_n = ۲, ۶, ۱۸, \dots \Rightarrow a_n = \underset{a_1}{۲} \times \underset{q}{۳}^{n-1}$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \boxed{\frac{\cancel{۲} \times (۳^{۱۰} - ۱)}{\cancel{(۳-۱)}}}$

$= ۳^{۱۰} - ۱ = ۵۹۰۴۹ - ۱ = \boxed{۵۹۰۴۸}$

ب)

$a_{۱۰} = ۲ \times ۳^{۹}, \; a_1 = ۲ \Rightarrow (۴ \times ۳^{۹})^{۵} = \boxed{۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵}}$

$\xLeftarrow{} (a_1 \times a_{۱۰})^{\frac{n}{۲}}$

به ترتیب نوشته شد

---

۹) اثبات

$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$

$a_1q - a, \; a_1q^2 - a_1q, \; a_1q^3 - aq^2, \dots$

$a(q-1) \xrightarrow[\times q]{} a_1q(q-1) \xrightarrow[\times \boxed{q}]{} a_1q^2(q-1), \dots$

$\frac{a_1q(q-1)}{a(q-1)} = \frac{a_1q^2(q-1)}{a_1q(q-1)} = q$

نسبت دنباله جدید

$t_n = \underset{t_1}{a(q-1)} \times \underset{q^{n-1}}{q^{n-1}}$

در واقع جملات دنباله‌ی هندسی هستند که در همه آنها $(q-1)$ ضرب شده.

---

۱۰) اثبات الف)

$a_1, a_2, \dots, a_n$

$+\; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$

$n(a_1 + a_n) \Rightarrow \frac{n}{۲}(a_1 + a_n)$

چون دو دنباله را جمع کردیم بر ۲ تقسیم می‌کنیم

$\Rightarrow a_1 = a_1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d)$

---

۱۰ ب)

$(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots a_1q^{n-1} = S_n) \times q$

$\underbrace{a_1q + a_1q^2 + \dots}_{S_n - a_1} a_1q^n = S_n \times q$

$S_n - a_1 + a_1q^n = S_n \times q \Rightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$

$\Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Scanned with CamScanner