۲۰

۱۱ / بهمن / ۱۴۰۱

نام و نام خانوادگی .... **پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره** ۱۴ ...... **کلاس** ..... دهم ریاضی

۱

$a_n = \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$ ×۲ ×۲ $\Rightarrow q = 2$ $\longrightarrow a_n = a_1 \times q^{n-1} \xrightarrow{\text{جمله عمومی}} a_n = \frac{1}{2}(2)^{n-1}$

الف) جمله دهم ← $a_{10} = \frac{1}{2}(2)^9 = 2^8 = 256$

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{a_{13} \times q^4}{a_{13}} = q^4 \xrightarrow{q=2} 2^4 = 16$

ج) $(a_m = a_n \times q^{m-n})$

$a_4 \times a_{10} = b^2$

$= a_4^2 \times q^6 = b^2 \longrightarrow b = \pm a_4 q^3 = \pm a_7$

$\longrightarrow a_7 = \frac{1}{2} \times 2^6 = 32 \longrightarrow b = \pm 32$ (واسطه هندسی)

د) $a_n = \frac{1}{2}(2)^{n-1} = 2^{n-2} = 128 = 2^7 \longrightarrow n - 2 = 7 \longrightarrow n = 9$

۲

$a_5 = 12$, $a_8 = 96$ $\longrightarrow a_8 = a_5 \times q^3 \longrightarrow 96 = 12 q^3 \longrightarrow q^3 = 8 \longrightarrow q = 2$

$\longrightarrow a_{10} = a_5 \times q^5 \longrightarrow a_{10} = 12 \times (2)^5 = 384$

۳

الف) $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = (\frac{a_3}{q^2})(\frac{a_3}{q})(a_3)(a_3 q)(a_3 q^2) = a_3^5 = 243 = 3^5 \longrightarrow a_3 = 3$

ب) $a_1 \times a_5$:

راه ۱: بازدم به توان فرض $\xrightarrow{\div a_3 \text{ طرفین } ۲}$ $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 = 81 \longrightarrow (a_1 \times a_5)^2 = 81 \longrightarrow a_1 \times a_5 = \pm 9$

$a_2 \times a_4 = a_1 \times a_5$ ← بر اساس نکته جمع اندیس ها

← - نیست چون: $a_1 \times a_5 = a_1^2 q^4$ حاصل + ⇐ توان ها زوج (جملات یکی در میان هم علامت اند)

راه ۲: $a_1 \times a_5 = \frac{a_3}{q^2} \times a_3 q^2 = a_3^2 = 3^2 = 9$

۴

$b^2 = ac$ ← در دنباله هندسی $\Longrightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2^{a+b} \longrightarrow 2^5 = 2^{a+b} \longrightarrow a + b = 5$

← واسطه حسابی بین ۲ عدد میانگین آنهاست $\longrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$

۵

$a_3 = 1 - x$

$a_7 = x$

$a_{11} = x + 1$

$\xrightarrow{\text{نکته جمع اندیس ها}} a_3 \times a_{11} = a_7^2 \longrightarrow (1 - x)(1 + x) = x^2 \longrightarrow 2x^2 = 1 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

← اما با توجه به این که در این ۳ جمله $\frac{a_7}{a_3} = q^4$ و $\frac{a_{11}}{a_7} = q^4$ و می دانیم $q^4 > 0$ است ⇐ a_3 و a_7 و a_{11} هم علامت اند

← که در حالت $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ برقرار است $a_{11} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ $a_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $a_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ← اما $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $a_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ $a_7 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $a_{11} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

← و $a_7 < 0$ و $a_3, a_{11} > 0$ می شوند ⇐ غ ق ق $\Longleftarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۶

$a_1+a_5=28=a_1(1+r^3)$

$a_2+a_4=12=a_1r(1+r)$

$\xrightarrow{\div}\ \frac{28}{12}=\frac{7}{3}=\frac{a_1(r+1)(r^2+1-r)}{a_1r(1+r)}\rightarrow 3r^2+3-3r=7r\rightarrow 3r^2-10r+3=0$

$\Delta=(-10)^2-4\times3\times3=100-36=64$

$r=\frac{10\pm8}{6}\begin{cases}r=1\\ r=9\end{cases}\xrightarrow{\div3}\begin{cases}r=\frac{1}{3}\rightarrow a_1\left(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}\right)=28\rightarrow \frac{a_1}{27}=1\rightarrow a_1=27\\ r=3\rightarrow a_1(1+3+9)=28\rightarrow a_1=1\rightarrow a_5=a_1r^4=81\end{cases}$

بزرگترین جمله برابر ۸۱ است

۷

$a_1+a_2+a_3=13\rightarrow \frac{a_2}{q}+a_2+a_2q=13\rightarrow \frac{q^2+q+1}{q}=\frac{13}{3}$

$a_1a_2a_3=27\rightarrow \frac{a_2}{q}\times a_2\times a_2q=a_2^3=27\Rightarrow a_2=3$

$3q^2+3q+3=13q$

$3q^2-10q+3=0$

$\Delta=100-36=64$

$q=\frac{10\pm8}{6}\begin{cases}q=1\\ q=9\end{cases}\xrightarrow{\div3}\begin{cases}q=\frac{1}{3}\rightarrow \frac{3}{\frac{1}{3}},3,3\times\frac{1}{3}\rightarrow 9,3,1\\ q=3\rightarrow \frac{3}{3},3,3\times3\rightarrow 1,3,9\end{cases}$

۸

$a_n=2,6,18,\dots$ (هندسی) $\rightarrow q=3$

الف) $S_n=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\rightarrow S_{10}=2\left(\frac{3^{10}-1}{2}\right)=3^{10}-1=59048$

ب) $P_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}\rightarrow P_{10}=\sqrt{(a_1a_{10})^{10}}=\sqrt{(a_1^2q^9)^{10}}=\sqrt{(2^2\times3^9)^{10}}=2^{10}\times3^{45}$

یا $a\times aq\times\dots\times aq^9=a^{10}\times q^{\frac{9\times10}{2}}=2^{10}\times3^{45}$

۹

دنباله اولیه $\rightarrow a,aq,aq^2,aq^3,\dots$ (هندسی)

دنباله تفاضلی (جدید) $\rightarrow aq-a,aq^2-aq,aq^3-aq^2,\dots\Rightarrow \underbrace{a(q-1)}_{t_1},\underbrace{aq(q-1)}_{t_2},\underbrace{aq^2(q-1)}_{t_3},\dots$

چون تفاضل دنباله هندسی $\Rightarrow$ حکم: $\frac{t_{n+1}}{t_n}=q'$ (هر جمله به جز جمله اول از ضرب جمله قبل از خود در قدر نسبت است)

$\frac{t_2}{t_1}=\frac{aq(q-1)}{a(q-1)}=q\rightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{aq^n(q-1)}{aq^{n-1}(q-1)}=q=q'$ (قدر نسبت جدید)

$\frac{t_3}{t_2}=\frac{aq^2(q-1)}{aq(q-1)}=q$ (البته به شرطی که $q\neq1$ حکم برقرار است)

۱۰

الف) حکم: $S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

اثبات: $n+m=r+s\Rightarrow a_n+a_m=a_r+a_s$ (دنباله حسابی)

$S_n=a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n$

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\dots$

روی جمله‌ای داریم که جمع ۲ عضو آن‌ها با هم برابر است

$n=2k\rightarrow \frac{n}{2}\times(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)=S_n$

تعداد زوج‌ها

مقدار برابر جمع

$n=2k-1$

$n\times\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)=\frac{n}{2}(a_1+a_1+(n-1)d)$

جمله وسط برابر میانگین جمله‌ها = میانگین جمله اول و آخر است.

$\rightarrow S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

اثبات دیگر: $S_n=a_2+(a_2+d)+(a_2+2d)+\dots=n\times a_2$

ب) حکم: $S_n=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)\rightarrow S_n=a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}$

$qS_n=aq+aq^2+aq^3+\dots+aq^n$

تفاضل $\rightarrow qS_n-S_n=aq^n-a\rightarrow S_n(q-1)=a(q^n-1)\Rightarrow S_n=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$