(به نام خدا)

۱)

$a_1 = ۴۰$ $\qquad \frac{۶۱ - ۴۰}{۳} = ۷ = d$ $\qquad a_n = ۷n + ۳۳$

$a_4 = ۶۱$ $\qquad ۲۰۸ - ۳۳ = ۷n$

$\boxed{n = ۲۵}$

۲)

$۷n + ۳ = a_n$

$۹۹۹ \geq ۷n + ۳ \geq ۱۰۰ \quad ۹۹۶ \geq ۷n \geq ۹۷ \quad (۱۴۳ - ۱۵) + ۱ = \boxed{۱۲۹}$

$n = ۱۵, \ldots, ۱۴۳$

۳)

$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = -۶n + ۱۲ \rightarrow$

$a_{16} + a_{17} + a_{18} = -۶n + ۱۲ \quad (n = ۱۵) \qquad a_7 + a_8 + a_9 = -۶n + ۱۲$

$۳a_{17} = -۶n + ۱۲ \quad a_{17} = -۲n + ۴ = -۲۶, \quad ۳a_8 = -۶n + ۱۲ \quad n = ۶$

$a_8 = -۲n + ۴ = -۸$

$a_{17} + a_8 = -۲۶ - ۸ = -۳۴$

۴)

$۲^x - ۱, \; ۲^{x+1}, \; ۲^{2x} - ۳ \; \rightarrow \; ۲^x - ۱ + ۲^{2x} - ۳ = ۲^{x+2}$

$n = ۳ \quad n = ۸ \quad n = ۱۳$ (+dd, +dd)

$۲^x + ۲^{2x} - ۲^2 = ۲^{x+2}$

$۲^x(۱ + ۲^x) = ۲^x(۴ + ۲^{2-x})$

$۳, ۸, ۱۳ \longrightarrow ۳ + ۸ + ۱۳ = \boxed{۲۴}$

$۱ + ۲^x = ۴ + ۲^{2-x}$

$۱ + ۲^x = ۲^2(۱ + \frac{۱}{۲^x}) \Rightarrow ۲^2 = \frac{۱ + ۲^x}{\frac{۲^x + ۱}{۲^x}}$

$۲^2 = ۲^x \left(\frac{۱ + ۲^x}{۲^x + ۱}\right) \rightarrow \boxed{x = ۲}$

(۵

$\begin{cases} a_{۱۰} - a_{۱۲} = ۵ \\ a_{۱۰} + a_{۱۲} = ۲۵ \end{cases}$ + $\quad ۲a_{۱۰} = ۳۰ \quad a_{۱۰} = ۱۵ \quad a_{۱۲} = ۱۰ \quad a_n = ۵n - ۳۵$

$a_{۲۱} = ۷۰$

(۶

$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ = \frac{۱}{۳}(a_۶ + a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰})$

$۵a_۳ = \frac{۱}{۳}(۵a_۸) \Rightarrow a_۳ = \frac{۱}{۳}a_۸$

$a + ۲d = \frac{۱}{۳}a + \frac{۷}{۳}d \qquad a + d = a_۲$ } ۳ برابر

$\frac{۲}{۳}a = \frac{۱}{۳}d \to d = ۲a \qquad ۳a = a_۲$ (۷

$t_n = t_{n-۳} + ۱۵ \qquad t_۹^۲ - t_۵^۲ = (t_۹ + t_۵)(t_۹ - t_۵)$ ۲۰

$t_۹ = t_۶ + ۱۵ \to a + ۸d = a + ۵d + ۱۵$

$t_۶ \to t_۵ + d \qquad ۳d = ۱۵ \quad d = ۵ \quad t_۹ = t_۵ + ۲۰$

$t_۹ - t_۵ = ۲۰$ ۲۴۰

$t_۹^۲ - t_۵^۲ = \frac{۲۰t_۹ + ۲۰t_۵}{a + ۴d} = \frac{۲۰a + ۱۶۰d + ۲۰a + ۸۰d}{a + ۴d} \Rightarrow$

$\frac{۴۰a + ۲۴۰d}{a + ۴d} =$ ۴ برابر (۸

$۲(۱ - ۶\sqrt{۳}), \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{۱۲}, ۲ + \sqrt{۳}$ ⑭

$d = \frac{۲ - ۱۲\sqrt{۳} - ۲ - \sqrt{۳}}{۱۴ - ۱} = \frac{-۱۳\sqrt{۳}}{۱۳} = -\sqrt{۳}$ (۹

$۲, \underbrace{n-۱ \; n \; ۳n-۲}_{۴n-۳}, ۳۲ \qquad \frac{۸۱ - ۲}{(n-۱) + ۱} = d = \frac{۳۲ - ۲}{(۴n - ۳) + ۱} \Rightarrow$

$۳۰n = ۳۶n - ۱۸ \qquad n = ۱۳$

$$a_{۱۷}+a_{۲}=a_{n}+a_{n+۴}\rightarrow n+n+۴=۲۰\rightarrow \boxed{n=۸}$$

$$a_n=۲a_{\frac{n}{۲}} \qquad a_۸=۲a_۴ \rightarrow a+۷d=۲a+۶d$$

$$-۲d=۲a$$

$$d=-a$$

$$a,\ a+d,\ a+۲d,\ \cdots$$

$$\downarrow$$

$$a,\ a-a,\ a-۲a,\ \cdots$$

$$\boxed{a_۲=۰}$$