نام و نام خانوادگی ..... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..... کلاس .....

۱

الف) $t_1 = 3(1)^2 - 1 = 2$ ، $t_2 = 3(2)^2 - 1 = 11$ ، $t_3 = 3(3)^2 - 1 = 26$ ، $t_4 = 3(4)^2 - 1 = 47$ ، $t_5 = 3(5)^2 - 1 = 74$

۵ جمله اول دنباله ← ۲ و ۱۱ و ۲۶ و ۴۷ و ۷۴

ب) $t_1 = \frac{2(1)+1}{(1)+4} = \frac{3}{5}$ ، $t_2 = \frac{2(2)+1}{(2)+4} = \frac{5}{6}$ ، $t_3 = \frac{2(3)+1}{(3)+4} = \frac{7}{7} = 1$ ، $t_4 = \frac{2(4)+1}{(4)+4} = \frac{9}{8}$ ، $t_5 = \frac{2(5)+1}{(5)+4} = \frac{11}{9}$

۵ جمله اول دنباله ← $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$

۲

الف) $t_{13} = \frac{(-1)^{(13)}}{\sqrt{(13)+3}} = \frac{-1}{\sqrt{16}} = \frac{-1}{4}$

ب) $t_{13} = 2(13) - \left[\frac{(13)}{4}\right] = 26 - 3 = 23$

$\frac{13}{4} = 3.25$

۳

الف) دنباله را تعیین علامت می‌کنیم ← $t_n = 2n - 10$ ← $2n - 10 < 0$ ، $2n < 10$ ، $n < 5$ ، $n \in \mathbb{N}$ ⟹ t_1, t_2, t_3, t_4 منفی هستند ⟹ ۴ جمله

ب) ... ← $t_n = (n-10)(n-4)$ ←

n		۴		۱۰	
	+	۰	−	۰	+
	×	×	✓	×	×

$n \in \mathbb{N}$ ⟹ t_5, t_6, t_7, t_8, t_9 منفی هستند

⟹ ۵ جمله

۴

الف) دنباله را تعیین علامت می‌کنیم ← $t_n = 2n - 16$ ← $2n - 16 \leq 0$ ، $n \leq 8$ ، $n \in \mathbb{N}$ ⟹ $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8$ ⟹ ۸ جمله

ب) ... ← $t_n = (n-3)(n-9)$ ←

n		۳		۹	
	+	۰	−	۰	+
	×	✓	✓	✓	×

$n \in \mathbb{N}$ ⟹ $t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9$

⟹ ۷ جمله

۵

$t_4 = 7$ ، $t_9 = 22$ ← از ۱ داریم: $t_9 = t_4 + 5d = 22$ ← $5d = 15$ ، $d = 3$ ← جمله اول دنباله: $t_4 = t_1 + 3d$ ← $t_1 = -2$ ← جمله عمومی دنباله: $t_n = t_1 + (n-1)d$

$t_n = -2 + 3(n-1)$ ← جمله ۳ دنباله ← $t_3 = -2 + 3(3-1) = 4$

۲ داریم: $\begin{cases} t_4 = a(4) + b = 7 \\ t_9 = a(9) + b = 22 \end{cases}$ ← $t_9 - t_4$ ← $22 - 7 = 5a$ ، $a = 3$ ← $t_4 = 7 = 3(4) + b$ ← $b = -5$

جمله عمومی دنباله حسابی ⟹ $t_n = an + b$ ← $a = 3$ ، $b = -5$ ← $t_n = 3n - 5$

← $t_3 = 3(3) - 5 = 4$

۶

ب) $t_n = (n+2)^2 - 3$ چون min آن به ازای $n=-2$ برابر -3 می‌شود،
n که باید در دنباله عضو اعداد طبیعی باشد ⇐ $n=1$ کمترین مقدار تعریف شده در دنباله است:
$(1+2)^2 - 3 = 6$ (به عنوان ورودی)

الف) راه اول: $t_n = (n-3)^2 - 7 \rightarrow (n-3)^2 \geq 0$ حاصل عبارت است. t_n به ازای $n-3=0$ است (کمترین $n=3$)
$\rightarrow t_3 = (3-3)^2 - 7 = -7$

راه دوم: $(a>0)$ تابع min $\left| \frac{-b}{2a} , \frac{-\Delta}{4a} \right.$ کوچکترین عضو برد تابع $\rightarrow y_{min} = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{8-36}{4} = -7$

(چون -7 به ازای $n=3$ که طبیعی است حاصل می‌شود ⇐ شرط $n \in N$ برقرار است)

۷

$-4, -7, -8, -7, -4, \dots$
اختلاف‌ها: $-3, -1, +1, +3$
$+2, +2, +2$ → اختلاف اختلاف‌ها (حالت دنباله درجه ۲) $= 2a = 2 \rightarrow a=1$

→ فرم دنباله درجه ۲: $an^2+bn+c \xrightarrow{a=1} n^2+bn+c$ تشکیل دستگاه

$$\begin{cases} t_1 = -4 = (1)^2 + (1)b + c = b+c+1 \\ t_2 = -7 = (2)^2 + (2)b + c = 2b+c+4 \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 2b+c+4-(b+c+1) = b+3 = -7-(-4)$$

$b = -6$

$b+c+1 = -4$
$-6+1+c = -4$
$c = 1$

⟹ جمله عمومی دنباله: $n^2 - 6n + 1 = t_n$

$\rightarrow t_{10} = (10)^2 - 6(10) + 1 = 41$

۸

$-6, -1, 8, 21, \dots$
$+5, +9, +13$
$+4, +4$ → چون اختلاف اختلاف‌ها (اختلاف فاصله‌ها) ثابت است ⇐ دنباله درجه ۲ است و این مقدار ثابت برابر $2a$ است
↳ $2a = 4$
$a = 2$

→ فرم کلی جمله عمومی دنباله درجه ۲: $(a \neq 0) \rightarrow t_n = an^2+bn+c$
$\xrightarrow{a=2} t_n = 2n^2+bn+c \rightarrow$

$$\begin{cases} t_1 = -6 = 2(1)^2 + b + c \rightarrow b+c = -8 \\ t_2 = -1 = 2(2)^2 + 2b + c \rightarrow 2b+c = -9 \end{cases}$$

$\rightarrow t_2 - t_1 = 2b+c-b-c = b = -1$
$\rightarrow -1 + c = -8 \rightarrow c = -7$

جمله عمومی دنباله: $t_n = 2n^2 - n - 7$

۹

برای تناهی کردن اشتراک این ۲ بازه نیم‌باز ۶ یا اشتراک تک‌عضوی است (یعنی سر بسته آنها برابر باشند) یا تهی است (سر بسته بازه‌ی $(-\infty, a+4]$ عقب‌تر و کوچک‌تر از سر بسته‌ی $[2a+1, +\infty)$ باشد: (مفهومی)

$a+4 \leq 2a+1$
$3 \leq a$

↳ $a \in [3, +\infty)$

۱۰

n ما عضو اعداد طبیعی موجود در بازه‌ی $[1, 100]$ است: (البته n‌ام a_n ها ۱۰۰ شرط است)

الف) $3, 6, 9, 12, \dots, 99 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)3$ → جمله آخر چندم است؟ $a_n = 3+(n-1)3 = 99$
$3n - 3 = 96$
$n = 33$ → ۳۳ عدد در این دنباله ⇐ ۳۳ عدد برای بخش الف در بازه‌ی ذکر شده

ب) $5, 10, 15, \dots, 100 \rightarrow a_n = 5 + (n-1)5 \rightarrow 5+(n-1)5 = 100 \rightarrow n = 20$

ج) هم‌زمان بر هر دو مجموعه $3k$ و $5k$ متعلق باشند ⇒ $15k$ اشتراک ۲ بخش: $15, 30, 45, \dots, 90 \rightarrow a_n = 15+(n-1)15 \rightarrow 15+(n-1)15 = 90 \rightarrow n = 6$

د) اجتماع ۲ مجموعه $3k$ و $5k$ مد نظر است $\rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$ — ۴۷ عدد
(الف، ب، ج)

$A = \{a \mid a = 3k , 1 \leq a \leq 100\}$ → بخش الف: $n(A)$
$B = \{a \mid a = 5k , 1 \leq a \leq 100\}$ → بخش ب: $n(B)$
$\rightarrow n(A \cap B)$ → بخش ج