تکلیف سری ۸ — به نام خدا — لعیا فرناسیان

۱-

الف) $f(x)=\sqrt{x|x|} \longrightarrow D_f = x \geq ۰$

هم علامت اند - منفی ها نمی‌شد

$g(x)=x \longrightarrow D_g=\mathbb{R}$

دامنه‌ها برابر نیستند پس دو تابع هم مساوی نیستند.

$f(x) \neq g(x)$

ب) $f(x)=\dfrac{(x+۳)(x+۱)+x+۴}{x^۲+۵x+۷}$

$g(x)=۱$

$f(x)=g(x)$

$(x+۳)(x+۱)+x+۴ = x^۲+۵x+۷$

$(x+۳)(x+۱)+x+۴=(x+۲)(x+۳)+۱$

$(x+۳)(x+۱)-(x+۲)(x+۳)=-۳-x$

$(x+۳)(-۱)=-۳-x$

$x+۳=x+۳ \longrightarrow$ صورت و مخرج $f(x)$ همواره با یکدیگر برابرند بنابراین تابع $f(x)$ همواره عدد ۱ را می‌دهد در ضمن مخرج هم دلتای منفی دارد پس دامنه $f(x)$ هم برابر $\mathbb{R}$ است.

ج) $f(x)=\dfrac{۴\sin^۲x-۶\sin x}{۲\sin x-۳} \longrightarrow ۲\sin x-۳\neq ۰$

$\sin x \neq ۱٫۵$ ✓ $D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=۲\sin x \longrightarrow D_g=\mathbb{R}$ $\quad D_g=D_f \quad g(x)=f(x)$

د) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ $\quad \dfrac{x}{|x|}\xrightarrow{x=-۱}\dfrac{-۱}{۱}=-۱$ $\quad f(x)=g(x)$

$g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ $\quad \dfrac{|x|}{x}\xrightarrow{x=-۱}\dfrac{۱}{-۱}=-۱$

۲-

الف) $f(x)=\left[\dfrac{x^۲}{x^۲+۱}\right]$ ، $g(x)=[x-[x]]$

$۰<x-[x]<۱ \Rightarrow [x-[x]]=۰$

$f(x)=g(x)$

$x^۲<x^۲+۱ \Rightarrow ۰<\dfrac{x^۲}{x^۲+۱}<۱ \Rightarrow \left[\dfrac{x^۲}{x^۲+۱}\right]=۰$

ب) $f(x)=\dfrac{۱}{[۲x]}$ ، $g(x)=\dfrac{۱}{۲[x]}$

$\xrightarrow{x=۰٫۵} f(x)=۱ \quad g(x)=\dfrac{۱}{۰}$ تعریف نشده

$\xrightarrow{x=۱٫۵} f(x)=\dfrac{۱}{۳} \quad g(x)=\dfrac{۱}{۲}$

$f(x)\neq g(x)$

ج) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-|x|}}$ ، $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{|x|-x}}$ $\quad g(x)\neq f(x)$

رابطه منفی است

$D_f \Rightarrow x-|x|>۰$

$|x|<x$ ✗

$D_g \Rightarrow |x|-x>۰$ $\quad D_g=(-\infty,۰)$

$|x|>x \rightarrow x<۰$

د) $f(x)\begin{cases}\dfrac{x^۳-x}{x-۱} & \rightarrow x\neq ۱\\ ۲ & \rightarrow x=۱\end{cases}$ ، $g(x)=x^۲+x$

$\xrightarrow{x=۲} f(x)=x^۲$ $\quad g(x)=۴+۲ \Rightarrow f(x)\neq g(x)$

$f(x)=۴$ $\quad g(x)=۶$

۳-

$f(x)+g(x)=x^۲+x+۱ \rightsquigarrow x^۲+۱+g(x)=x^۲+x+۱$

$f(x)-g(x)=x^۲-x+۱$

$۲f(x)=۲x^۲+۲$

$\boxed{f(x)=x^۲+۱}$

$\boxed{g(x)=x}$

$f^۲(x)-g^۲(x)=(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$

$=(x^۲+۱+x)(x^۲+۱-x)$

$=(x^۲+۱)^۲-x^۲$

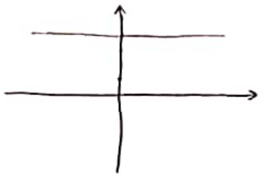
$f^۲(x)-g^۲(x)=x^۴+۱+۲x^۲-x^۲=\boxed{x^۴+x^۲+۱}$

-۴

$f(x) = x - \sqrt{x^2-4}$

$g(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

$f \times g = x^2 - (x^2-4) = 4$



-۵

$f(x) = \dfrac{ax+2}{x^2-mx+n}$ $\qquad \dfrac{ax+2}{x^2-mx+n} = \dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}$ $\qquad D_f = D_g$

$g(x) = \dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}$ $\qquad \times 2\,(2x^2-3x-5 \neq 0)$

$4x^2-6x-10 \neq 0$

$\underbrace{(2x-5)}_{x=\frac{5}{2}}\underbrace{(2x+2)}_{x=-1} \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}, -1\right\} \rightsquigarrow$ پس ۱- ، $\frac{5}{2}$ x^2-mx+n را صفر می کنند

$x^2-mx+n \xrightarrow{x=-1} 1+m+n=0$

$n=-m-1 \rightsquigarrow n=-1{,}5-1$

$\boxed{n=-2{,}5}$

$\xrightarrow{x=\frac{5}{2}}$ $6{,}25-2{,}5m+n=0$

$6{,}25-2{,}5m-m-1=0$

$5{,}25=3{,}5m$

$\boxed{1{,}5=m}$

$$\frac{ax+2}{x^2-1{,}5x-2{,}5} = \frac{x-b}{2x^2-3x-5}$$

$\xrightarrow{x=1}$ $\dfrac{a+2}{-3} = \dfrac{1-b}{-6} \Longrightarrow 6a+12=3-3b$

$6a+12=3+12$

$\boxed{a=0{,}5}$

$\xrightarrow{x=0}$ $\dfrac{2}{-2{,}5} = \dfrac{-b}{-5} \Longrightarrow 10=-2{,}5b$

$\dfrac{-10}{2{,}5} = b \longrightarrow \boxed{b=-4}$

$am - bn = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right) - \left(-4 \times \frac{-5}{2}\right)$

$= \frac{3}{4} - 10 = 0{,}75 - 10 = \boxed{-9{,}25 = \frac{-37}{4}}$

-۶

$f(x) = \dfrac{bx+2}{8x+b}$, $g(x) = c \longrightarrow \dfrac{bx+2}{8x+b} = c$

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{a\} \Longrightarrow 8a+b=0$

$8a=-b$

$a=\frac{-b}{8}$

$$\frac{ab}{c} = \frac{\frac{-b^2}{8}}{\frac{bx+2}{8x+b}}$$

$\Rightarrow -b^2(8x+b) = 8(bx+2)$

$-8b^2x - b^3 = 8bx+16$

$0 = 8bx + 8b^2x + b^3 + 16$

$0 = 8bx(1+b) + 16 + b^3$

$۲f^{-۱} = \{(-۱,۳),(۲,۷),(۳,-۵),(۰,۰)\} \rightarrow f = \{(-۱,۲)(۲,۴)(۳,-۲)(۰,\frac{۱}{۲})\}$ -۷

$D_f \cap D_g = \{-۱,۲,۳\}$ $\frac{۲g}{f+g} = \{(-۱,۴)(۲,۱)(۳,۴)\}$

$f = \{(۲,a),(-۳,۳a-۲b),(c,۵),(۲,d)\}$ $d+c=?$ $a=d=-۱$ -۸

$g = \{(۲,-۱),(-۳,۱),(a-۳b,a)\}$

$۳a-۲b=۱$ $a-۳b=c$ $d+c=\boxed{۴}$

$-۲b=۴$ $-۱+۶=۵$

$b=-۲$

$f(x) = \sqrt{-x^۲+x-m}$, $g(x) = \{(a,b)\}$ $a+b=?$ -۹

$\sqrt{-a^۲+a-m} = b$

$-a^۲+a-m = b^۲$

$-b^۲-a^۲+a = m$

$-(a^۲+b^۲)+a = m$

$a-m = a^۲+b^۲$

$(a+b)^۲ = a^۲+b^۲+۲ab$

$(a+b)^۲ = a-m+۲ab$

$a+b = \sqrt{a-m+۲ab}$

$-x^۲+x-m \geq ۰$

$x^۲-x+m \leq ۰$

$x(x-۱)+m \leq ۰$

-۱۰

$f(x) = \frac{۲x+a}{x^۲+۶x+b}$

$g(x) = \frac{۲}{x-c}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{a}{b} \\ g(x) = \frac{۲}{-c} \end{array}\right\}$ اگر $x=۰$

$\frac{a}{b} = \frac{۲}{-c} \Rightarrow ۲b = -ac$

$\boxed{b = \frac{-ac}{۲}} \rightarrow ۲b = -ac$

$\frac{-۲b}{c} = c$

$\frac{۲b}{c} = -a$

$\frac{۲x+a}{x^۲+۶x+b} = \frac{۲}{x-c}$

$\cancel{۲x^۲}+ax-۲cx-ac = \cancel{۲x^۲}+۱۲x+۲b$

$ax-۲cx-\cancel{ac} = ۱۲x+\cancel{(-ac)}$

$x(a-۲c) = ۱۲x$

$\boxed{a-۲c = ۱۲}$

$۲c = a-۱۲$

$c = \frac{a-۱۲}{۲}$

$D_f = D_g$

$D_g = \mathbb{R}-\{c\}$ یعنی c را اگر به جای x در f(x) بگذاریم جواب ۰ می‌شود $\rightarrow \boxed{c^۲+۶c+b=۰}$

$\frac{-۲b}{a} = \frac{a-۱۲}{۲} \rightarrow -۴b = a^۲-۱۲a$

$۲ac = a^۲-۱۲a$