تکلیف سری ۸ — به نام خدا — ۱۵/۵ — لعیا فرباسیان

۱- (۲)

الف) $f(x)=\sqrt{x|x|} \longrightarrow D_f = x \geq 0$
هم علامت است هر دو عدد - ها نمی‌شد
$g(x) = x \longrightarrow D_g = \mathbb{R}$
دامنه‌ها برابر نیستند پس دو تابع هم مساوی نیستند.
$f(x) \neq g(x)$

ب) $f(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)+x+4}{x^2+5x+7}$
$g(x)=1$
$f(x)=g(x)$

$(x+3)(x+1)+x+4 = x^2+5x+7$
$(x+3)(x+1)+x+4 = (x+2)(x+3)+1$
$(x+3)(x+1)-(x+2)(x+3) = -3-x$
$(x+3)(-1) = -3-x$
$x+3 = x+3 \longrightarrow$ صورت و مخرج $f(x)$ همواره
با یکدیگر برابرند بنابراین تابع $f(x)$ همواره عدد ۱ را می‌دهد در ضمن مخرج هم دلتای منفی دارد پس دامنه $f(x)$ هم برابر $\mathbb{R}$ است.

ج) $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x - 6\sin x}{2\sin x - 3} \longrightarrow 2\sin x - 3 \neq 0$, $\sin x \neq 1/5$, $D_f = \mathbb{R}$
$g(x) = 2\sin x \longrightarrow D_g = \mathbb{R}$ $\quad D_g = D_f \quad g(x)=f(x)$

د) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $\quad D_f = \mathbb{R}-\{0\}$ $\quad \dfrac{x}{|x|} \xrightarrow{x=-1} \dfrac{-1}{1} = -1$ $\quad f(x)=g(x)$
$g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\quad D_g = \mathbb{R}-\{0\}$ $\quad \dfrac{|x|}{x} \xrightarrow{x=-1} \dfrac{1}{-1} = -1$

۲- (۱/۵)

الف) $f(x) = \left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right]$, $g(x) = [x-[x]]$ $\quad 0 \leq x-[x] < 1 \Rightarrow [x-[x]] = 0$
$f(x) = g(x)$ $\quad x^2 < x^2+1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right] = 0$

ب) $f(x) = \dfrac{1}{[2x]}$, $g(x) = \dfrac{1}{2[x]}$
$x=0/5 \to f(x)=1$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{0}$ تعریف نشده
$x=1/5 \to f(x)=\dfrac{1}{3}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{2}$
$f(x) \neq g(x)$

ج) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ $\quad g(x) \neq f(x)$
رابطه نمی‌است
$D_f \Rightarrow x-|x| > 0$ $\quad D_g \Rightarrow |x|-x > 0$ $\quad D_g = (-\infty, 0)$
$|x| < x$ ✗ $\quad |x| > x \to x < 0$

د) $f(x) \begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x-1} & \to x \neq 1 \\ 2 & \to x=1 \end{cases}$, $g(x) = x^2+x$ $\quad f(1) = g(1) = 2$
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-1)}{x-1} = x(x+1) = x^2+x & x \neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$
$x=2 \longrightarrow f(x) = x^2$, $f(x)=4$ $\quad g(x) = 4+2$, $g(x)=6$ $\Longrightarrow f(x) \neq g(x)$
$f(x)=g(x)$
$D_f = D_g$

۳- (۲)

$f(x)+g(x) = x^2+x+1 \rightsquigarrow \cancel{x^2+1}+g(x) = \cancel{x^2}+x+\cancel{1}$
$f(x)-g(x) = x^2-x+1$ $\quad \boxed{g(x)=x}$
$2f(x) = 2x^2+2$
$\boxed{f(x) = x^2+1}$

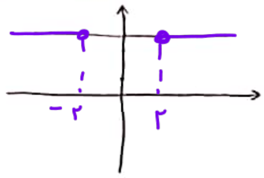
$f^2(x)-g^2(x) = (f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$
$= (x^2+1+x)(x^2+1-x)$
$= (x^2+1)^2 - x^2$
$f^2(x)-g^2(x) = x^4+1+2x^2-x^2 = \boxed{x^4+x^2+1}$

۴-

$f(x) = x - \sqrt{x^2-4}$

$g(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

$f \times g = x^2 - (x^2-4) = 4$



$D_{f \times g} = x^2 \geq 4 \to x \leq -2$
$x \geq 2$

۱,۵

۵-

۲

$f(x) = \dfrac{ax+2}{x^2-mx+n}$ $\qquad \dfrac{ax+2}{x^2-mx+n} = \dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}$ $\qquad D_f = D_g$

$g(x) = \dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}, -1\} \rightsquigarrow$ پس -1 و $\frac{5}{2}$ ، x^2-mx+n را صفر می‌کنند

$2(2x^2-3x-5 \neq 0)$

$4x^2-6x-10 \neq 0$

$\underbrace{(2x-5)}_{x=\frac{5}{2}}\ \underbrace{(2x+2)}_{x=-1} \neq 0$

$x^2-mx+n \xrightarrow{x=-1} 1+m+n=0$

$n = -m-1 \rightsquigarrow n = -1,5-1$

$\boxed{n = -2,5}$

$\xrightarrow{x=\frac{5}{2}} 6,25 - 2,5m + n = 0$

$6,25 - 2,5m - m - 1 = 0$

$5,25 = 3,5m$

$\boxed{1,5 = m}$

$$\frac{ax+2}{x^2-1,5x-2,5} = \frac{x-b}{2x^2-3x-5}$$

$\xrightarrow{x=1} \dfrac{a+2}{-3} = \dfrac{1-b}{-6} \Longrightarrow 6a+12 = 3-3b$

$6a+12 = 3+12$

$\boxed{a = 0,5}$

$\xrightarrow{x=0} \dfrac{2}{-2,5} = \dfrac{-b}{-5} \Longrightarrow 10 = -2,5b$

$\dfrac{-10}{2,5} = b \to \boxed{b = -4}$

$a_m - b_n = (\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}) - (-4 \times \frac{-5}{2})$

$= \frac{3}{4} - 10 = 0,75 - 10 = \boxed{-9,25 = \frac{-37}{4}}$

۶-

۱

$f(x) = \dfrac{bx+2}{8x+b}$, $g(x) = c \longrightarrow \dfrac{bx+2}{8x+b} = c$

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{a\} \Longrightarrow 8a+b=0$

$8a = -b$

$a = \dfrac{-b}{8}$

$\dfrac{ab}{c} = \dfrac{\frac{-b^2}{8}}{\frac{bx+2}{8x+b}}$

$\longrightarrow bc = 2$

$8c = b \longrightarrow 8c^2 = 2 \longrightarrow c = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -b^2(8x+b) = 8(bx+2)$

$-8b^2x - b^3 = 8bx+16$

$0 = 8bx + 8b^2x + b^3 + 16$

$0 = 8bx(1+b) + 16 + b^3$

$c = \frac{1}{2} \to a = -\frac{1}{2} \to b = 4 \to \frac{ab}{c} = -4$

$c = -\frac{1}{2} \to a = \frac{1}{2} \to b = -4 \to \frac{ab}{c} = +4$

-۷

$2f^{-1} = \{(-1,3),(2,7),(3,-8),(0,0)\} \rightarrow f = \{(-1,2)(2,4)(3,-2)(0,\frac{1}{2})\}$

$D_f \cap D_g = \{-1,2,3\} \qquad \frac{2g}{f+g} = \{(-1,4)(2,1)(3,3)\}$

۲

-۸

$f = \{(2,a),(-3,2a-2b),(c,8),(2,d)\} \qquad d+c=? \qquad a=d=-1$

$g = \{(2,-1),(-3,1),(a-3b,8)\}$

$3a-2b=1 \qquad a-3b=c \qquad d+c=\boxed{4}$

$-2b=4 \qquad -1+6=8$

$b=-2$

۲

-۹

$f(x) = \sqrt{-x^2+x-m} \quad , \quad g(x) = \{(a,b)\} \qquad a+b=?$

$\hookrightarrow \Delta=0 \rightarrow m=\frac{1}{4}$

۰/۱۷۵

$\sqrt{-a^2+a-m} = b \qquad (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \qquad -x^2+x-m \geq 0$

$-a^2+a-m = b^2 \qquad (a+b)^2 = a-m+2ab \qquad x^2-x+m \leq 0$

$-b^2-a^2+a = m \qquad a+b = \sqrt{a-m+2ab} \qquad x(x-1)+m \leq 0$

$-(a^2+b^2)+a = m$

$a-m = a^2+b^2$

$f(x) = \sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2} \rightarrow \begin{matrix} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{matrix} \rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

-۱۰

۰/۱۷۵

$f(x) = \frac{2x+a}{x^2+6x+b} \qquad g(x) = \frac{2}{x-c}$

$\left.\begin{matrix} f(x) = \frac{a}{b} \\ g(x) = \frac{2}{-c} \end{matrix}\right\}$ اگر $x=0$

$\frac{a}{b} = \frac{2}{-c} \Rightarrow 2b=-ac \qquad \boxed{b=\frac{-ac}{2}} \rightarrow 2b=-ac \qquad \frac{-2b}{c}=c \qquad \frac{2b}{c}=-a$

$\frac{2x+a}{x^2+6x+b} = \frac{2}{x-c}$

$\cancel{2x^2}+ax-2cx-ac = \cancel{2x^2}+12x+2b$

$ax-2cx-\cancel{ac} = 12x+\cancel{(-ac)}$

$x(a-2c) = 12x$

$\boxed{a-2c=12}$

$2c=a-12$

$c=\frac{a-12}{2}$

$D_f = D_g$

$D_g = \mathbb{R}-\{c\}$ ~ یعنی c را اگر به جای x در f(x) بگذاریم جواب ۰ می شود ~ $\boxed{c^2+6c+b=0}$

$\frac{-2b}{a} = \frac{a-12}{2} \rightarrow -4b = a^2-12a$

$2ac = a^2-12a$

$x^2+6x+b \longrightarrow \Delta=0 \rightarrow b=9$

$\frac{2x+a}{(x+3)^2} = \frac{2}{x-c} \rightarrow x-c = x+3 \rightarrow c=-3$

$\frac{2x+a}{\cancel{(x+3)^2}} = \frac{2}{\cancel{x+3}} \rightarrow 2x+a = 2x+6$

$a=6$

$a+b+c = 6+9-3 = 12$