شقایق اماوی — تکلیف شمارهٔ ۲۸ / دهم دفتر B

۱- $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\geq a \\ ax-4, & x\leq a \end{cases}$

درحالتی که $x=a$ باشد جواب هردو یکسان می‌شود

$ax-4 \xrightarrow{x=a} x^2-4 \qquad \cancel{x^2}-4=\cancel{x^2}+2x \longrightarrow \boxed{x=-2}$

۲- $g(x)=2x+b \xrightarrow{(2,3)} g(2)=4+b=3 \leadsto b=-1$

$f(x)=\dfrac{x^2+a}{2x+1} \xrightarrow{(2,3)} f(2)=\dfrac{4+a}{4+1}=3 \leadsto a=11$

$f(x)=\dfrac{x^2+11}{2x+1} \longrightarrow f(1)=\dfrac{1+11}{2+1}=\boxed{4}$

۳- $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2+ax+b} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,4\}$

یعنی ریشه‌ها عبارت‌اند از ۱- و ۴ است $\longrightarrow x^2-Sx+P$

جمع ریشه‌ها، ضرب ریشه‌ها

$x^2-3x-4 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-6x-8$

$f(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2-6x-8} \longrightarrow f(1)=\dfrac{4+1}{2-6-8}=\boxed{-\dfrac{5}{12}}$

۴- $f(x)=\dfrac{x^3-\sqrt{3}}{-4x^2+ax+b} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$x^2-Sx+P \xrightarrow[\text{دارد برای } S \text{ و } P \text{ باید دوبار آن را در نظر بگیریم}]{\text{وقتی معادله درجه دو یک ریشه}} x^2+2x+1 \xrightarrow{\times -4} -4x^2\underbrace{-8}_{a}x\underbrace{-4}_{b}$

$a+b=-8-4=\boxed{-12}$

۵-

$$f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x^2+mx+1)} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

$x^2+mx+1 \longrightarrow$ باید همواره + باشد (ریشه نداشته باشد) $\longrightarrow \Delta<0$

$$\longrightarrow m^2-4<0 \longrightarrow m^2<4 \xrightarrow{\sqrt{}} \boxed{-2<m<2}$$

۶-

$$f(x)=\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

① $\rightarrow x^2\neq 0$ ✗ هیچگاه $x^2=0$ نمی‌شود

② $4-\frac{1}{x^2}\geqslant 0 \longrightarrow 4\geqslant\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\sqrt{}} 2\geqslant\frac{1}{x}\geqslant-2 \longrightarrow x\geqslant\frac{1}{2}$

$\longrightarrow x\leqslant-\frac{1}{2}$

$$D_f=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

۷-

$$f(x)=\sqrt{mx^2+2mx+1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$mx^2+2mx+1\geqslant 0 \longrightarrow$ یعنی باید min دارد و همواره + باشد (ریشه نداشته باشد) $((\Delta<0))$

① $\rightarrow m>0$

② $\rightarrow 4m^2-4m<0 \longrightarrow 4m(m-1)<0 \rightarrow 0<m<1$

$$\boxed{0<m<1}$$

۸

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}, & x\neq a\\[2mm] 4x+k, & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad g(x)=2x+1$$

$$f(x)=g(x)\xrightarrow[\text{در ازای}]{x=\frac{1}{2}} 4\left(\tfrac{1}{2}\right)+k=2\left(\tfrac{1}{2}\right)+1\longrightarrow 2+k=2\longrightarrow k=0$$

از آنجایی که دامنهٔ $g(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است بنابراین باید دامنهٔ $f(x)$ هم برابر $\mathbb{R}$ باشد

پس: $a=\dfrac{1}{2}$

$$a+k=\frac{1}{2}+0=\boxed{\frac{1}{2}}$$

۹

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{9x^2-4}{3x+2}, & x\neq -\dfrac{2}{3}\\[2mm] 3ax+2, & x=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\qquad g(x)=3x+b$$

مزدوج

$$f(x)=g(x)\xrightarrow[x\neq -\frac{2}{3}]{\text{در ازای}}\frac{9x^2-4}{3x+2}=3x+b\longrightarrow\frac{\cancel{(3x+2)}(3x-2)}{\cancel{3x+2}}=3x+b$$

$$\longrightarrow 3x-2=3x+b\longrightarrow b=-2$$

$$g\left(-\tfrac{2}{3}\right)\Rightarrow \cancel{3}\left(-\tfrac{2}{\cancel{3}}\right)-2=-4\qquad f\left(-\tfrac{2}{3}\right)\Rightarrow 3a\left(-\tfrac{2}{3}\right)+2=-4\longrightarrow$$

$$-2a=-6\longrightarrow a=3$$

$$a-b=3-(-2)=\boxed{5}$$

۱۰ـ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & , \quad x \neq ۲ \\ ۲a^۲ + ax & , \quad x = ۲ \end{cases} \qquad g(x) = x + ۲$$

$$g(۲) \Rightarrow ۲ + ۲ = ۴ \qquad f(۲) \Rightarrow ۲a^۲ + ۲a = ۴ \longrightarrow ۲a^۲ + ۲a - ۴ = ۰$$

جمع ریشه‌ها برابر صفر است

$\boxed{a = ۱ \text{ و } -۲} \Leftarrow$ پس