سلیقی اسای — تکلیف شمارهٔ ۲۸ / دهم دفتر B — ۱۹،۲۵ آذر

۱- $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & , \ x \geq a \\ ax-\varepsilon & , \ x \leq a \end{cases}$ (حالتی که $x=a$ باشد) جواب هردو یکی می‌شود

$ax-\varepsilon \xrightarrow{x=a} x^2-\varepsilon \qquad x^2-\varepsilon=x^2+2x \longrightarrow x=-2$ ✓ (۲)

۲- $g(x)=2x+b \xrightarrow{(2,3)} g(2)=4+b=3 \rightsquigarrow b=-1$

$f(x)=\dfrac{x^2+a}{2x+1} \xrightarrow{(2,3)} f(2)=\dfrac{4+a}{4+1}=3 \rightsquigarrow a=11$

$f(x)=\dfrac{x^2+11}{2x+1} \rightsquigarrow f(1)=\dfrac{1+11}{2+1}=4$ ✓ (۲)

۳- $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2+ax+b} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,4\}$

یعنی ← ریشه‌های مخرج اعداد صحیح‌اند ← x^2-5x+6 (جمع ریشه‌ها، ضرب ریشه‌ها)

$x^2-3x-4 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-6x-8$

$f(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2-6x-8} \rightsquigarrow f(1)=\dfrac{4+1}{2-6-8}=-\dfrac{5}{12}$ ✓ (۲)

۴- $f(x)=\dfrac{x^3-\sqrt{3}}{-4x^2+ax+b} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$x^2-5x+6 \xrightarrow{\text{وقتی معادله درجه دو یک ریشه دارد برای S و P باید دوبار آن را نظر بگیریم}} x^2+2x+1 \xrightarrow{\times -4} -4x^2-8x-4$ ✓ (۲)

$a+b=-8-4=-12$

۵- $f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x^2+mx+1)} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

۱/۵

$x^2+mx+1 \longrightarrow$ باید همواره + باشد (ریشه نداشته باشد) $\longrightarrow \Delta<0$

چه x ضعیف $x=1$ هر مقدار مجاز است

$\longrightarrow m^2-4<0 \longrightarrow m^2<4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} -2<m<2$

۶- $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}$ ① $\rightarrow x^2\neq 0$ ✗ هیچگاه $x^2=0$ نمی‌شود

② $2-\frac{1}{x^2}\geq 0 \longrightarrow 2\geq\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{2}\geq\frac{1}{|x|}\geq -\sqrt{2} \longrightarrow |x|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow x\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$D_f=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

۷- $f(x)=\sqrt{mx^2+2mx+1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

همگی باید min دارد و همواره + باشد (ریشه نداشته باشد ($\Delta<0$))

① ② ۱/۵

① $\rightarrow m>0$ $\quad m=0 \rightarrow f(x)=1 \rightarrow$ قبول چون با دامنه $\mathbb{R}$

$m=1 \rightarrow f(x)=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$ $D_f=\mathbb{R}$

② $\rightarrow 2m^2-2m<0 \longrightarrow \underbrace{2m}_{>0}\underbrace{(m-1)}_{<0}<0 \rightarrow 0<m<1$

$0\leq m<1$

۸-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{8x^2-1}{2x-1} & , x\neq a\\ 8x+k & , x=\frac{1}{2}\end{cases} \qquad g(x)=2x+1$$

$$f(x)=g(x) \xrightarrow[\text{در ازای}]{x=\frac{1}{2}} 8\left(\frac{1}{2}\right)+k=2\left(\frac{1}{2}\right)+1 \longrightarrow 4+k=2 \longrightarrow k=0$$

از آنجایی که دامنهٔ $g(x)$ و برابر $\mathbb{R}$ است بنابراین باید دامنهٔ $f(x)$ هم برابر $\mathbb{R}$ باشد

پس: $a=\frac{1}{2}$ ✓

$$a+k=\frac{1}{2}+0=\boxed{\frac{1}{2}}$$

۹-

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{9x^2-4}{3x+2} & , x\neq -\frac{2}{3}\\ 3ax+2 & , x=-\frac{2}{3}\end{cases} \qquad g(x)=3x+b$$

$$f(x)=g(x) \xrightarrow[x\neq -\frac{2}{3}]{\text{در ازای}} \underbrace{\frac{9x^2-4}{3x+2}}_{\text{می‌دهد}}=3x+b \longrightarrow \frac{(3x+2)(3x-2)}{3x+2}=3x+b$$

$$\longrightarrow 3x-2=3x+b \longrightarrow b=-2$$

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x^2\left(-\frac{2}{3}\right)-2=-4 \qquad f\left(-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 3a\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-4 \longrightarrow$$

$$-2a=-6 \longrightarrow a=3$$

$$a-b=3-(-2)=\boxed{5}$$ ✓

۱۵-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\varepsilon}{x-2} & , \ x\neq 2\\ 2a^2+ax & , \ x=2\end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

$$g(2)\Rightarrow 2+2=\varepsilon$$

$$f(2)\Rightarrow 2a^2+2a=\varepsilon \longrightarrow 2a^2+2a-\varepsilon=0$$

۲

جمع ریشه‌ها برابر صفر است

پس $a=1$ و -2

۵- ۲ حالت برای عبارت x^2+mx+1 وجود خواهد داشت:

حالت ۱) ریشه حقیقی نداشته باشد: $\Delta<0 \rightsquigarrow m^2-4<0 \rightarrow -2<m<2$ (1)

حالت ۲) ریشه مضاعف $x=1$ داشته باشد $\rightarrow x^2+mx+1=x^2-2x+1 \rightarrow m=-2$ (2)

$1 \cup 2 \rightsquigarrow \boxed{-2 \leq m < 2}$

۷- باید دو شرط $\Delta \leq 0$ و $a>0$ را همزمان داشته باشد!

$\Delta \leq 0 \rightarrow (-2m)^2-4(m)(1) \leq 0 \rightarrow 4m^2-4m \leq 0 \rightarrow 4m(m-1) \leq 0$

	0		1	
	+	−		+

$a>0 \rightarrow m>0$ (2) $\rightsquigarrow 1 \cap 2 \rightarrow 0<m \leq 1$

اگر $m=0$ باشد تابع به صورت تابع ثابت $y=1$ خواهد بود و دامنه‌ی تابع ثابت نیز $\mathbb{R}$ است پس $m=0$ نیز قابل قبول است!

$\boxed{0 \leq m \leq 1}$ ←