۱) دیا نادعلی خواه

۱۸

الف) $(9, x+2y)$, $(3x-y, -4)$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{-3}$

$3x-y=9$
$x-3x+2y=-4$ $\Rightarrow$ $3x-y=9$, $-3x-4y=12$ $\Rightarrow$ $-7y=21$, $y=-3$, $x=2$

$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=-1 \xrightarrow{\times -xy} y-x=xy$

$\frac{5}{x}-\frac{7}{y}=-2 \xrightarrow{\times -xy} 7x-5y=2xy$

۱/۵

ب) $(-1, -3)$, $(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}, \frac{5}{x}-\frac{7}{y})$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3y=2x=2xy \\ 7x-5y=2y-2x \end{cases} \Rightarrow 10x=12y \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

۲) $f=\{(a, 2a), (1, a+1), (1, -2), (2, b)\}$ $\quad a+1=-2 \rightarrow a=-3$

$f=\{(-3, -6), (1, -2), (2, b)\}$

$\underbrace{f(a)}_{-6}+2\underbrace{f(2)}_{2b}=3\underbrace{f(1)}_{3x-2} \Rightarrow -6+2b=-6 \Rightarrow 2b=0$, $b=0$

۳) $f=\{(-1, m^2-3m), (3, 5), (-1, -2), (m+1, 4), (2, 4), (m^2+2, 4m+1)\}$

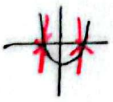
$m^2-3m=-2 \rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1$, $m=2$

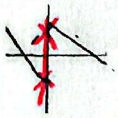
۱/۵

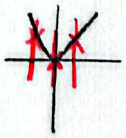
① $m=1 \Rightarrow (m+1, 4) \rightarrow (2, 4)$ / $(m^2+2, 4m+1) \rightarrow (3, 5)$ ✓

② $m=2 \Rightarrow (m+1, 4) \Rightarrow (3, 4)$ غ ق ق $\quad m=1$

۴) الف)  تابع نیست چون خط عمود را در نقطه قطع می کند

ب)  تابع هست

ج)  تابع نیست چون خط عمود را در ۲ نقطه قطع می کند

د)  تابع هست

۵) الف) $y=-\sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-\sqrt{x+1} \\ y_2=-\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow y_1=y_2$ تابع هست

۱/۵

ب) $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \xrightarrow{x^2} 2=\frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow 8=y^2 \Rightarrow 4-4y^2=y^2 \Rightarrow 4=5y^2 \rightarrow \frac{4}{5}=y^2$

$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

به ازای $y=\frac{-2}{\sqrt{5}}$ عبارت برابر ۲- می شود!

تابع نیست

۶) الف) $|y| = x \xrightarrow{x=1} |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست

ب) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0 \rightarrow (y+1)^3 - 1 + x^3 + x = 0 \rightarrow (y+1)^3 = 1 - x^3 - x \rightarrow$

$y = \sqrt[3]{1 - x^3 - x} - 1$ $\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{1-x^3-x} - 1 \\ y_2 = \sqrt[3]{1-x^3-x} - 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2$ تابع هست

۷) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 7} \rightarrow \frac{(\sqrt{3}-2)^2 + 4(\sqrt{3}-2) + 5}{(\sqrt{3}-2)^2 + 2(\sqrt{3}-2) + 7} = \frac{9 - 4\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} - 8 + 5}{9 - 4\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} - 4 + 7} =$

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ (۱۵)

۸) $f(-1) = -4 \rightarrow (-1)^3 + a(-1) + b = -4 \rightarrow b = -3 + a$

$f(x) = 3x - a \rightarrow x^3 + ax + b = 3x - a \xrightarrow{b = -3+a} x^3 + ax + (-3+a) = 3x - a \Rightarrow x^3 + ax - 4x - 3 + a + a = 0$

$\rightarrow x^3 + (a-4)x + (2a-3) = 0 \xrightarrow{x=-1}$ بشاول

$(-1)^3 + (a-4)(-1) + (2a-3) = 0 \Rightarrow (-1 + 4 - 3) + (-a + 2a) = 0 \Rightarrow -1 + a = 0 \rightarrow a = 1$

$b = -3 + a \Rightarrow b = -2$ $x^3 + (a-4)x + (2a-4) = 0 \xrightarrow[b=-2]{a=1} x^3 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\div x+1} (x+1)(x^2 - x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 4(1)(-1)}}{2(1)} \rightarrow x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 + x_3 = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

۹) $f_c\{(2a+b), (1, 2a), (-1, a-2b+1)\}$ تابع ثابت است $\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2a \Rightarrow b = a \\ a - 2b + 1 = 2a \Rightarrow \end{cases}$

$a - 2a + 1 - 2a = 0 \Rightarrow$

$-3a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

۱۰) $\frac{4x^2 - ax + c + 1}{bx + 3} = x + \frac{bx + 3}{}$ $\rightarrow 4x^2 - ax + c + 1 = bx^2 + 3x$ ضرایب تمام توان‌ها باید برابر صفر باشد

① $4 - b = 0 \rightarrow b = 4$ (ضریب x^2)

② $-a - 3 = 0 \rightarrow a = -3$ (ضریب x)

③ $c + 1 = 0 \rightarrow c = -1$ (عدد ثابت)

$a + b + c = -3 + 4 - 1 = 0$

۱- ب

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{5}{x} - \frac{7}{y} = -3 \end{cases} \xrightarrow{x-5} \begin{cases} -\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{5}{x} - \frac{7}{y} = -3 \end{cases} \rightarrow -\frac{2}{y} = 2 \rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$\text{if } y=-1 \rightarrow \frac{1}{x} + 1 = -1 \rightarrow \frac{1}{x} = -2 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \frac{x}{y} = +\frac{1}{2}$$

۳-

$$f = \{(-1, m^2-3m), (3,5), (-1,-2), (m+1,4), (2,4), (m^2+2, 4m+1)\}$$

$(-1, m^2-3m), (-1,-2) \rightarrow m^2-3m+2=0 \rightarrow m=2$ یا $m=1$

$m=1 \rightarrow (2,4)(m+1,4) \rightarrow (2,4)(2,4)$ ✗

$m=2 \rightarrow (3,5)(m+1,4) \rightarrow (3,5)(3,4)$ ✗

$\rightarrow$ به ازای هیچ مقدار m جواب نمی‌دهد!

۵

ب)

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \rightarrow \frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2}} = \frac{y_2}{\sqrt{1-y_2^2}} \rightarrow \frac{y_1^2}{1-y_1^2} = \frac{y_2^2}{1-y_2^2}$$

$$\rightsquigarrow y_1^2 - y_1^2 y_2^2 = y_2^2 - y_1^2 y_2^2 \xrightarrow[\text{هم علامت}]{y_1, y_2} y_1 = y_2 \rightarrow \text{✓ راه‌حل تابع است}$$

۷

$$f(x) = \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7} = \frac{x^2+4x+4+1}{x^2+4x+4+3} = \frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2+3}$$

$$f(\sqrt{3}-2) = \frac{(\sqrt{3}-2+2)^2+1}{(\sqrt{3}-2+2)^2+3} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$