شقایق امامی

تکلیف شمارهٔ ۲۴ / دهم دختر B

۱-

الف) $y = 2x^2 - 4x + 1$ $\quad a > 0 \longrightarrow min \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \\ \frac{-\Delta}{4a} \text{ یا جایگذاری} \end{array} \right.$ $\longrightarrow \frac{4}{4} = 1$ ، $\longrightarrow y = 2 - 4 + 1 = -1$

مختصات رأس: $(1, -1)$

نوع اکسترمم: مینیمم

ب) $y = -2x^2 + 3x - 5$ $\quad a < 0 \longrightarrow max \left| \begin{array}{l} \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{18}{16} + \frac{9}{4} - 5 = -\frac{31}{8} \end{array} \right.$

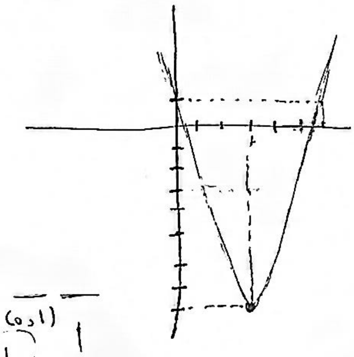
مختصات رأس: $(\frac{3}{4}, -\frac{31}{8})$

نوع اکسترمم: ماکزیمم

۲-

الف) $y = x^2 - 6x + 1$ (عرض از مبدأ $\longrightarrow (0,1)$) $\quad a > 0 \longrightarrow min \; \cup$ $\left| \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ -8 \end{array} \right.$

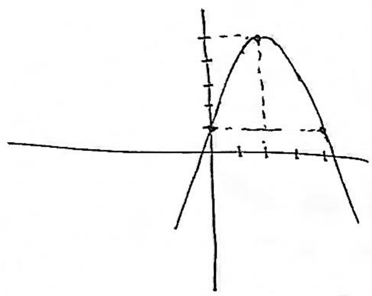
x	0	3	6
y	1	-8	1



ب) $y = -x^2 + 4x + 1$ $(0,1)$

$a < 0 \longrightarrow max \; \cap$ $\left| \begin{array}{l} \frac{-4}{-2} = 2 \\ 5 \end{array} \right.$

x	0	2	4
y	1	5	1



۳-

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \xrightarrow{\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-2} x^2 - x - 2 \longrightarrow$

چون این عامل معادله است پس $4x^3 + kx^2 - 9x - 2$ باید بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر باشد

$4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = (x^2 - x - 2)(4x + \gamma)$

$\longrightarrow 4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 4x^3 + (\gamma - 4)x^2 + (-\gamma - 8)x - 2\gamma$

$-\gamma - 8 = -9 \longrightarrow \gamma = 1 \rightsquigarrow \overset{1}{\gamma} - 4 = k \longrightarrow k = -3$

۴-

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1$ $\qquad \frac{\sqrt{(-3m)^2 - 4(1)(m)}}{1} = \sqrt{9m^2 - 4m} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9m^2 - 4m = 1$

$\longrightarrow 9m^2 - 4m - 1 = 0 \rightsquigarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{18} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-m}{2} \xrightarrow{m \text{ جایگذاری}} -\frac{2 + \sqrt{13}}{18} \; , \; -\frac{2 - \sqrt{13}}{18}$

-۵

$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \frac{\sqrt{(m+۲)^۲ - ٤\times۲\times m}}{۲} = \frac{\sqrt{m^۲+٤+٤m-۸m}}{۲}$

$\rightarrow \frac{\sqrt{(m-۲)^۲}}{۲} \rightarrow \frac{m-۲}{۲}$ ← اختلاف ریشه‌ها

$S_\Delta = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{۳}{٤}$ (قاعده: اختلاف دو ریشه، ارتفاع: عرض از مبدأ)

$\frac{\frac{m-۲}{۲}\times m}{۲} = \frac{۳}{٤} \rightarrow \frac{m-۲}{۲}\times m = \frac{۳}{۲} \rightarrow m(m-۲)=۳ \rightarrow m=۳ \ , \ m=-۱$

$y = x^۲ - mx + ۱ \xrightarrow{m=-۱} y = x^۲ + x + ۱$ ـــ طول رأس سهمی ← $\left| \frac{-b}{۲a} = -\frac{۱}{۲} \right.$ ، $\frac{۱}{٤} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \boxed{\frac{۳}{٤}}$

$y = x^۲ - mx + ۱ \xrightarrow{m=۳} y = x^۲ - ۳x + ۱ \rightarrow \left| \frac{۳}{۲} \right.$ ، $\frac{۹}{٤} - \frac{۹}{۲} + ۱ = \boxed{-\frac{۵}{٤}}$ یا

-۶

$-\frac{\Delta}{٤a} \rightarrow -\frac{۹-٤a^۳}{٤a} = \frac{۷}{۸} \rightarrow a - \frac{۹}{٤a} = \frac{۷}{۸} \xrightarrow{\times ۸a} ۸a^۲ - ۷a - ۱۸ = ۰$

$\rightarrow a = \frac{۷ \pm \sqrt{٤۹+۵۷۶}}{۱۶}$ $\begin{cases} a = ۲ \ \checkmark \\ a = -\frac{۹}{۸} \ \times \end{cases}$

یک مقدار

برای اینکه سهمی min داشته باشد باید $a>۰$ باشد پس:

-۷

$x^۲ - (a+۱)x + a = ۰$ ـــ ریشه‌ها (دو عدد زوج متوالی) ← $n \ , \ n+۲$

$S = \frac{-b}{a} = a+۱ = n+(n+۲) \rightarrow a+۱ = ۲n+۲ \rightarrow a = ۲n+۱$

$P = \frac{c}{a} = a = n(n+۲) \rightarrow a = n^۲+۲n$

$n^۲ + ۲n = ۲n + ۱ \rightarrow n^۲ = ۱ \rightarrow n = \pm۱$ ـــ چون n طبیعی است ← $n = ۱$

$\rightarrow a = ۲(۱)+۱ = ۳ = P$

$x^۲ - (۳a+۱)x + b = ۰$ ـــ ریشه‌ها (دو عدد زوج متوالی) ← $m \ , \ m+۲$

$S = ۳a+۱ \xrightarrow{a=۳} = ۱۰ = m+(m+۲) = ۲m+۲ \rightarrow m = ٤$ ـــ ریشه‌ها ← $٤ , ۶$

$P = ٤\times۶ = ۲٤$

اختلاف حاصل ضرب‌ها $\Rightarrow ۲٤ - ۳ = \boxed{۲۱}$

۸-

$y = ax^2 + ax + 2$ رأس سهمی $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a}{-2a} = \frac{1}{2} \\ y = -a(\frac{1}{4}) + a(\frac{1}{2}) + 2 = \frac{a}{4} + 2 \end{cases}$ $\Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{a}{4}+2)$

چون رأس سهمی روی $y = 2bx^2 - bx - 1$ است:

$\frac{a}{4} + 2 = 2b(\frac{1}{4}) - b(\frac{1}{2}) - 1 \rightsquigarrow \frac{a}{4} + 2 = -1 \rightsquigarrow a = -12$

$y = 2bx^2 - bx - 1$ رأس سهمی $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{4b} = \frac{1}{4} \\ y = 2b(\frac{1}{16}) - b(\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{b}{8} - 1 \end{cases}$ $\Rightarrow (\frac{1}{4}, -\frac{b}{8} - 1)$

چون رأس سهمی روی $y = ax^2 + ax + 2$ است:

$-\frac{b}{8} - 1 = -a(\frac{1}{16}) + a(\frac{1}{4}) + 2 \overset{a=-12}{\rightsquigarrow} = \frac{3}{4} - 3 + 2 = -\frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow -\frac{b}{8} - 1 = -\frac{1}{4} \rightsquigarrow b = -6$ $\quad b - a \Rightarrow -6 - (-12) = \boxed{6}$

۹- $y = 25ax^2 + 4x + \beta$ $\quad S \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{4}{25a}$ $\quad P \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25a} \overset{\beta \neq 0}{\rightarrow} \alpha = \frac{1}{25a}$

$\frac{1}{25a} + \beta = -\frac{4}{25a} \longrightarrow \beta = -\frac{5}{25a} = -\frac{1}{5a}$

$\beta > \alpha \longrightarrow -\frac{1}{5a} > \frac{1}{25a} \rightsquigarrow$ پس: $a < 0$

یعنی:

رأس در ناحیه اول $\begin{cases} y > 0 \longrightarrow \text{چون سهمی رو به پایین است دریتاها یکی + و یکی -} \\ x > 0 \xrightarrow{\text{چون } a<0} x = \frac{-4}{5a} \end{cases}$ مختصات رأس

۱۰-

$x^2-(a^2+b^2-12)x+a+b-1=0$

$S \Rightarrow a+b=a^2+b^2-12=(a+b)^2-2ab-12$

$P \Rightarrow ab=a+b-1$

$a+b=(a+b)^2-2(a+b-1)-12$

$S=S^2-2(S-1)-12$

$S=S^2-2S-10$

$S^2-3S-10=0 \rightarrow (S-5)(S+2)=0$

$S=5$ (چون طبیعی اند) ، $S=-2$ ✗