نیکا تابش — ۱۹٫۷۵ آفرین — دهم دختر B

۱- ۲

$\frac{a}{q}, a, aq, \dots \Rightarrow \frac{a}{q} \times a \times aq = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \frac{a}{q} + a + aq = 21 \Rightarrow \frac{4}{q} + 4 + 4q = 21 \Rightarrow \frac{4}{q} + 4q - 17 = 0 \Rightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0$

$\Rightarrow q = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4\times4)}}{2(4)} \Rightarrow q = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow \begin{cases} ① \ q = 4 \\ ② \ \boxed{q = \frac{1}{4}} \end{cases}$

چون حسابی نیست
پس این قابل قبول است

۲- ۲

$(2x)^2 = (x^2-2)(x^2+4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow 2x^2 = x^4 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2-4)}_{x^2=4 \Rightarrow}(x^2+2) = 0$

$x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow 8, 4, 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \\ x = -2 \Rightarrow 8, -4, 2 \Rightarrow \ (x = -\frac{1}{2}) \end{cases}$ غ ق ق $\Rightarrow$

$S_7 = 8 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^7}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \times \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{127}{8}}$

۳- ۲

$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = \frac{121}{81}, \ S_5 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 243 \times \frac{121}{81} = \boxed{363}$

۴- ۲

حسابی: $A = \frac{1+64}{2} = 32/5$ ، هندسی: $B^2 = 1 \times 64 \Rightarrow B = \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} ① \ A+B = 32/5 + 8 = \boxed{40/5} \\ ② \ A+B = 32/5 - 8 = \boxed{24/5} \end{cases}$

۵- ۲

$a_{101} = a_1 + 100d, \ d = \frac{-95}{4} - (-24) = \frac{1}{4} \Rightarrow a_{101} = -24 + 100 \times \frac{1}{4} = 1$

$128, a_2, \dots \Rightarrow a_n = 128 \times q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 128 \times q^7 = 1 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$

۶- ۱٫۷۵

a_3, a_7, a_9

$a_1+2d, a_1+6d, a_1+8d \Rightarrow (a_1+6d)^2 = (a_1+2d)(a_1+8d) \Rightarrow a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d = a_1^2 + 16d^2 + 10a_1d \Rightarrow 20d^2 = -2a_1d \Rightarrow 2d(10d + a_1) = 0$

$\Rightarrow ① \ 2d = 0 \Rightarrow d = 0$ غ ق ق

جملات لزوماً متمایز نیستند پس $d=0$ هم جواب قبول است

$② \ 10d + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{d = \frac{-a_1}{10}}$

۷- ۲

a_2, a_4, a_8

$a_1+d, a_1+3d, a_1+7d \Rightarrow (a_1+3d)^2 = (a_1+d)(a_1+7d) \Rightarrow a_1^2 + 9d^2 + 6a_1d = a_1^2 + 7d^2 + 8a_1d \Rightarrow 2d^2 = 2a_1d \Rightarrow d = a_1 \Rightarrow 2a, 4a, 8a \Rightarrow$

$q = \frac{4a}{2a} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1q^9 = \frac{1}{4} \times 2^9 = \boxed{128}$

۸- ۲

$3a_2, 2a_3, a_4$

$3(a_1q), 2(a_1q^2), a_1q^3 \Rightarrow 2a_1q^2 = \frac{3a_1q + a_1q^3}{2} \Rightarrow -4a_1q^2 + 3a_1q + a_1q^3 = 0 \Rightarrow a_1q(-4q + 3 + q^2) = 0 \Rightarrow (q-1)(q-3) = 0 \Rightarrow ① \ q = 1$ غ ق ق

$a_1q = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ غ ق ق

$② \ \boxed{q = 3}$

۹- ۲

$d = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_4 &= 2 + 3 \times (-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{5}{4} \\ a_8 &= 2 + 7 \times (-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} \\ a_{13} &= 2 + 12 \times (-\tfrac{1}{4}) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{5}{4} + x, \frac{1}{4} + x, -1 + x \Rightarrow (\frac{1}{4} + x)^2 = (x + \frac{5}{4})(x - 1) \Rightarrow$

$\frac{1}{16} + x^2 + \frac{1}{2}x = x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{-21}{4} \Rightarrow -4, -5, \frac{-25}{4} \Rightarrow q = \frac{\frac{-25}{4}}{\frac{-5}{1}} = \boxed{\frac{5}{4}}$

۱۰-

$$a_۱ + a_۱ q^۳ + a_۱ q^۶ = ۷۳$$

$$t_۱ = a_۱ = a \,,\; t_۲ = a_۴ = a q^۳ \,,\; t_{۱۰} = a_۷ = a q^۶$$

$$\left.\begin{aligned} t_۲ &= a q^۳ \\ t_۲ &= t_۱ + d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a q^۳ = a + d \Rightarrow d = a(q^۳ - ۱)$$

$$t_{۱۰} = a q^۶ = a + ۹a(q^۳ - ۱) = a + ۹a q^۳ - ۹a \Rightarrow a q^۶ - ۹a q^۳ + ۸a = ۰ \Rightarrow a(q^۶ - ۹q^۳ + ۸) = ۰ \Rightarrow q^۳ = \frac{۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۳۲}}{۲} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &۱\; q^۳ = ۸ \Rightarrow q = ۲ \\ &۲\; q^۳ = ۱ \Rightarrow q = ۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$q = ۱ \Rightarrow a + a + a = ۷۳ \Rightarrow a = \frac{۷۳}{۳} \Rightarrow d = a(q^۳ - ۱) = \frac{۷۳}{۳} \times (۱ - ۱) = \boxed{۰}$$

$$q = ۲ \Rightarrow a + ۸a + ۶۴a = ۷۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow d = a(q^۳ - ۱) = ۱ \times (۸ - ۱) = \boxed{۷}$$